

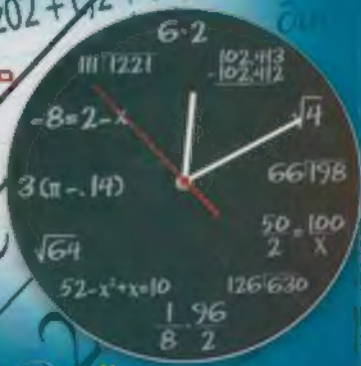
الرياضيات الشاملة

المصفوفات - الاقترانات الجبرية

هندسة التحويلات - المتباينات والبرهنة الخطية

$$212 + c = (202 + c)2 + c$$

صالح رشيد بطارسة





الرياضيات الشاهلة

المصفوفات الاقتربات الخطية
صندسة التحويلات الهندسية والبرهان الخطية



للنشر والتوزيع

الرياض - عمان

هاتف: 00962 6 5658253 / 00962 6 5658252

فاكس: 00962 6 5658254 س.ب: 141781

البريد الإلكتروني: darasoma@orange.jo

الموقع الإلكتروني: www.darasoma.net



الرياضيات الشاملة

• النسبوات والمعدلات

• النقرات الجوية

• التماثلات والرموز العددية

• هندسة التحويلات

تأليف

مسلم رشيد بقرصة

MOHAMMED KHATIB



الناشر

دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

• هاتف: 5658252 - 5658253

• فاكس: 5658254

• البريد الإلكتروني: info@darasama.com

• ب. ي. : 141781

Website: darasama.com

www.darasama.net

خزينة الطبع محفوظة

الطبعة الأولى

2014م

رقم التسجيل في وزارة الثقافة الأردنية

(2013/6/2214)

510

بطاقة 2، صافي نفوذ

الرياضيات العامة/صافي نفوذ بطاقة 2 - عمان، دار أسامة

لتأجير والتوزيع، 2013.

() من

ج 1: (2013/6/2214).

الوصف: الرياضيات /

ISBN: 978-9957-22-385-4

الفهرس

٩	المصفوفات والمصفوفات
١٠	(١-٧) المصفوفة Matrix
١١	(٢-٧) أشكال المصفوفات ونوعاتها Types of matrixes
١٥	(٣-٧) جبر المصفوفات
٢٨	(٤-٧) المحددات
٢٢	(٥-٧) تطبيقات على المحددات والمصفوفات
٤١	(٦-٧) أمثلة محلولة على المصفوفات والمحددات
٥٩	(٧-٧) أسئلة وتدريبات واخرين كتالوج حلولاً من فهارس وفهارس
٦٧	الاكترانات الجبرية
٦٨	(١-٨) الأنماط Patterns
٦٩	(٢-٨) الاكتران الجبري Algebraic Function
٧١	(٣-٨) أنواع الاكترانات الجبرية Types of Algebra Functions
٨٢	(٤-٨) إشارة الاكتران الجبري Sign of Algebraic
٨٧	(٥-٨) جبر الاكترانات
٩٢	(٦-٨) الاكتران العكسي Inverse Function
٩٩	(٨-٨) اسمة كثيرات الحدود
١٠٢	(٩-٨) نظرية الباقي والموصل وتحليل كثيرات الحدود إلى عواملها الأولية
١٠٢	نظرية الباقي Remainder Theorem
١١٤	نظرية العوامل The Factors Theorem
١١١	(١٠-٨) حل أنظمة من المعادلات الجبرية بمتغير واحد
١٢٠	(١١-٨) تجزئة الاكترانات الجبرية نسبياً أو (تجزئة الكسور الجبرية)
١٢٧	(١٢-٨) أمثلة محلولة على الاكترانات الجبرية
١٤٥	(١٣-٨) أسئلة وتدريبات واخرين كتالوج حلولاً من فهارس وفهارس
١٧١	الديناميات وفروعها المتعددة

١٧٧	-----	Inequality	المتباينة (٩-١)
١٧٨	-----		(٩-٢) حل نظام من المتباينات بمتغير واحد ومن درجات مختلفة
١٩١	-----		(٩-٣) حل نظام من متباينات عملية بمتغيرين
١٩٩	-----	Linear Programming	البرمجة الخطية (٩-٤)
٢٠٢	-----	Graphical Method	الطريقة الهندسية لحل البرمجة الخطية بمتغيرين (٩-٥)
٢١٠	-----	Algebraic method	الطريقة الجبرية لحل البرمجة الخطية بمتغيرين (٩-٦)
٢١٩	-----		(٩-٧) أمثلة محلولة على التباينات وقربها الخطية
٢٣٥	-----		(٩-٨) أمثلة ونظريات ونظائرها بمتطلب حلولاً من المتغيرين والمتغيرات
٢٤٧	-----		هندسة التحويلات
٢٤٨	-----	Isometries	التساويات الهندسية (١٠-١)
٢٤٨	-----	Reflection	الانعكاس (١٠-٢)
٢٥٤	-----	Rotation	التدوير (١٠-٣)
٢٦٩	-----		(١٠-٤) أمثلة محلولة على التباينات والبرمجة الخطية
٢٨٣	-----		(١٠-٥) أمثلة ونظريات ونظائرها بمتطلب حلولاً من المتغيرين والمتغيرات

المقدمة

بعد الاتكـال على الله...

قمت بتكليف وإعداد هذه السلسلة من الرياضيات تحت عنوان الرياضيات الشاملة، بمضمون كامل وعلم والفكر وأسلوب نادر، نعم إنه أسلوب علمي بميله يخلو من الحشو والفضول والتعقيد، كونه يعتمد على الاستكثار من الأمثلة والتمارين لتوضيح المسائل ولتقريبهم دون تكرار مفرط للدارسين والدارسين وبلا إيجاز مفرط للنظريات والقوانين.

من المعلوم أن الرياضيات قديمة قدم الزمان وهبها الله للإنسان منذ أن خلق أبائنا آدم وأمناء حواء، ولكن الآن ما علمت الرياضيات كما كانت عليه من أزمان مجرد مجموعة من الرموز والأشعار والأعداد.

ومع أنها كذلك إلا أنها أصبحت بالإضائة إلى ذلك ضرورة من ضرورات الحياة سكانها والماء والقداس التي يحتاجها الإنسان للقضاء على الجهل والفقر والمرض. تلك الأمثلة التي لا تملأ إلا مع من تخلف من البشر.

لذا لا بد من القول بـ:

الرياضيات جسر للجسر إلى عصر التكنولوجيا والعلوم الزاخرة بالاختراعات والابتكارات والفنون، والتي نحن بحاجة ملحة إليها جميعاً لتسيير عجلة الحياة بكل يسر وبلا معاناة.

الرياضيات إن كانت لا تعلم هي بالذات مشوقة للجدامير المحبة للعلم، والقدرة على التفكير، ويمكن لا يجرى على عشقها من البشر إلا من كان قوي الإرادة سريع الهدية سليم العقل والجسم معاً. ومنطق من قال بهذا المصملم العقل التميم في الجسم السليم. وأمنق منه من يقول: الرأس بلا تفكير كالأداة المشروخ، كلاهما يستحق التكسير.

- الرياضيات لن كنت لا تدري شُعي الحكاء وشُدُّب الأخلاق وتسمو بالإنسان
الى العلماء حكيم لآ؟ وجميع روفد الفضلاء من العلماء والرياضيين لعلماء
الرياضيات.

- الرياضيات لا تحتاج من دارسها الكثير من الجهد والعناء، بل يجب عليه
الإيمان بالسوية بالقوانين والمنطويات، ولكن ليس كالميكانيكا والحفظ دون
الفهم وإنما تحتاج الى التدريب المكثف الكيفي، والاستمرار مع الدقة
والإتقان والسرعة قدر الإمكان.

~ فيادارس الرياضيات عليك استخدام "الورقة والقلم" أفضل وسيلة لدراسة
العلوم قاسية، ، لتصبح بعد مدة من الزمن من علماء الرياضيات البارزين..
نؤكد ونحثم على ذلك بقولنا آمين..

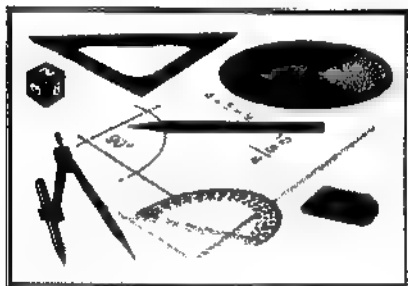
المؤلف

تنويه

بما أن هذا السياق لا بد لي من أن أنه إلى هذه البسطة
منذ البداية هاكول:

بما أننا نعيش عصر العلم والتكنولوجيا ، وجب علينا
استخدام الحواسيب والآلات الحاسبة لتسهيل اجراء العمليات
الرياضيات ، واستخراج نتائجها بشكل دقيق واثبات ، وبالسرعة
التي يصف بها هذا الزمن .

المؤلف



المصروفات والمبيعات

Matrices and Determinants



٧) المصفوفة Matrix

يمود التمثيل في ابتكار المصفوفات الى العالم الهلاني كوكوا (١٦٣٧)

١٧٨ م) عام ١٨٨٣ م وهو أول من طور المصفوفات الحديثة عنها

ويكن العالم الهلاني كوكوا (١٧٧٢ - ١٨٥٧ م) هو أول من وضع أسس

نظرية المصفوفات بطريقة منظمة والشكل الذي سقراء من خلال المصفوفات التالية

المصفوفة، عبارة رياضية مكونة من منظومة أعداد حقيقية مرتبة على شكل

مصفوف بأعمدة، تسمى هذه الأعداد عناصر المصفوفة أو مدخلاتها،

يكتب في المثال.

مثال:

في إحدى المدارس الثانوية كان عدد طلاب الصف الأول الثانوي العلمي ٢٥ طالباً

وعدد طلاب الصف الأول الثانوي الأدبي ٣٤ طالباً

وعدد طلاب الصف الأول الثانوي العلمي ١٦ طالباً

وعدد طلاب الصف الثاني الثانوي العلمي ١٩ طالباً

وعدد طلاب الصف الثاني الثانوي الأدبي ٥٢ طالباً

وعدد طلاب الصف الثاني الثانوي الصناعي ١٨ طالباً

نرى التسميات السابقة على شكل مصفوفة

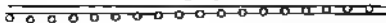
مترمر للمصفوفة بأحد الحروف الهلانية أسطر خط صغير هكذا ، ب ،

جـ فالمصفوفة التي تمثل 'المعلومات السابقة عند وضع الفروع كـعدة والعصول

الدراسية كـمصفوف هي:

$$1 - \begin{pmatrix} 16 & 21 & 25 \\ 18 & 23 & 19 \end{pmatrix}$$

الصف الأول الثانوي
الصف الثاني الثانوي



فالأعداد ٧٥ ، ٢٤ ، ١٦ ، ١٩ ، ٤٢ ، ١٨ هي مدخلات للمصفوفة ١ عدد مصفوفي، الثاني، وعدد أعمدتها ثلاثة

ويسمى نمر عدد المصفوف = عدد الأعمدة × رتبة المصفوفة

ولكن، دون إجراء عملية المصوب إطلاقاً، لأن الرتبة دمر ونوست عملية

مصوب، فالمصفوفة ١ أعلام من الرتبة ٢ × ٣ وتكتب هكذا $\frac{1}{3 \times 2}$

ويشكل عام للمصفوفة $\frac{1}{3 \times 2}$ هي المصفوفة التي عدد مصفوفي = م مثلاً وعدد أعمدتها = ن عاموداً، تعمل م، ن ٣ ط كما عند طهيمة.

وتكتب مدخلات المصفوفة بشكل عام، يربط كل مدخله فيها باسم

المصفوفة التي هي عناصر فيها

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \frac{3}{3 \times 2}$$

وهكذا...

وطد تدوين المصفوفة ١ مجردة من أي معلومات أخرى، فظهر على الشكل:

$$\begin{pmatrix} 16 & 24 & 75 \\ 18 & 42 & 19 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \times 2}$$

(٧ - ٢) أشكال المصفوفات وأنواعها Types of matrices

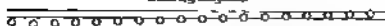
والمصفوفات على لشكل، ولأنواع متعددة، وتربط بينهم م ن (عدد

المصفوف وعدد الأعمدة) هكذا يلي:

(١) المصفوفة المستطيلة Rectangular matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \times 2}$$





(i) المصفوفة المربعة Square matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{إذا كانت } n = 3 \text{ مثل:} \quad = \frac{1}{2 \times 2}$$

(ii) مصفوفة الصف Row matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 \times 4} \quad \text{إذا كانت } n = 1 \text{ مثل:}$$

(iv) مصفوفة العمود Column matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 \times 2} \quad \text{إذا كانت } n = 1 \text{ مثل}$$

(v) مصفوفة القطر Diagonal matrix:

حيث مصفوفاتها التي لا تشكل قطراً فيها معلومة أي قيمة لكل منها
أصغار مثل:

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

(vi) مصفوفة متثلثة:

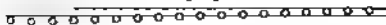
حيث نصف مصفوفاتها معلومة ونصفيها الآخر مع معلومات القطر لها، مثل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

(vii) المصفوفة الصفرية Zero matrix:

مصفوفاتها أصغار ويرمز لها بالرمز 0 مثل:





$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

(I_n) مصفوفة الوحدة Unit matrix

جميع مدخلاتها ما عدا القطر الرئيسي فيها اصفار القطر الرئيسي هو
الذي من اليمين باتجاه اليسار) ويرمز لها بالرمز I_n مثل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

هذا وتساوي المصفوفتان اذا تساوت رتبتهما ، وكذلك اذا تساوت هبهما
المدخلات المتناظرة، والمدخلات المتناظرة هي المدخلات أو العناصر التي تقع على نفس
المكان داخل المصفوفتين المتساويتين.

فالمصفوفتان البرهة لتساوي اذا تساوت هبهما المدخلات المتناظرة، أي اذا

كان،

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

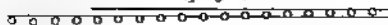
والمدخلات المتناظرة شريطة صحتها:

فإن $\frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{b_{11}}$ عندما $a_{11} = b_{11}$ ونقرأ a واحد واحد $= b$ واحد واحد

$a_{12} = b_{12}$ اثنين واحد $= b$ اثنين واحد

$a_{21} = b_{21}$ وهكذا.

$a_{22} = b_{22}$



ونبدأ بعملية الجمع $Addition$

الشرط الوحيد لجمع المصفوفات هو أن تكون من نفس الرتبة.

وأما إمكانية عملية الجمع فنتم سكما يلي: لجمع المصفوفات المتناظرة في المصفوفات المراد جمعها سكما يلي.

مثال،

$$\text{أوجد ناتج جمع: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{جوابه: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 1+2 & -1+1 \\ 0+1 & -2+0 & 0+1 \end{pmatrix}$$

واسلاحظ أن رتبة المصفوفة الناتجة عن جمع المصفوفات هي نفس رتبة كل

$$\text{من المصفوفتين والمعلوم: } \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\text{حيث: } \frac{a}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \quad \text{لجميع قيم } a, b, c$$

نظرية:

عملية جمع المصفوفات تبديلية وتجميعية، والدليل هنا المثال ومن شقين:

$$\text{الشق الأول: لجمع مباشرة } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{وهكذا: } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{الشق الثاني: } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

المصفوفات والمحددات



$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{وكذلك}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

الطرقين متساويان

ويشكل عام فإن:

$$\text{Commutative الجمع التبادلي} \quad 1 + 2 = 2 + 1$$

$$\text{Associative الجمع تجميعي} \quad (1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)$$

$$\text{Identity matrix هي المصفوفة المحايدة} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2+2}$$

لعملية جمع المصفوفات فإنه ينتج أن لكل مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2

معكوساً جبرياً Inverse of matrix وهي ما تسمى سالب (المصفوفة Negative matrix)

كما في المثال:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ هي المصفوفة سالب } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{فكون} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ولذلك نقول: طرح المصفوفات شرفه كما يلي:

$$1 - 2 = 1 + (-2) = -1 \quad \text{لذلك المصفوفة } 1 - \text{سالب المصفوفة } 2 =$$

هكذا

$$\begin{pmatrix} 1 & - \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ويمكن أن نسمي عملية الطرح مباشرة هكذا:

$$\text{بمعن الجواب المبادى} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & - & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & - \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



والآن لننظر من أن عملية طرح المصفوفات ليست تبديلية ولا تجميعية

كما يلي

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ & \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & - \\ 2 & 2 & - \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & - \\ 2 & 2 & - \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 2 & 1 & - \\ 0 & 1 & - \end{pmatrix} \end{aligned}$$

غير متساويتين

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right) \right)$$

وكذلك

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

(1)

غير متساويتين

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right) -$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

(7)

وبالمثل $1 - 1 \neq 1 - 1$ الطرح غير تبديلي

وكذلك $1 - (2 - 1) \neq (1 - 2) - 1$ الطرح غير تجميعي

◆ ضرب المصفوفات:

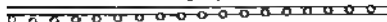
وعملية الضرب في المصفوفات البينتان:

الأولى عملية ضرب عدد حقيقي في مصفوفة * عدد حقيقي * مصفوفة

$$\text{أو } 1 \times \frac{1}{2 \times 2} \text{ حيث } 1 \in \mathbb{R}, 2 \times 2 \text{ مصفوفة مربعة من الرتبة } 2 \times 2$$

وهذا الضرب يسمى تحليلاً بالمعرب القياسي Scalar multiply fraction

والمنصوب هو ضرب أعداد حقيقية في مصفوفات (ليست من نوع واحد)



وعنيفة لضرب يتم بضرب كل مدخلة من مدخلات المصفوفة بالمعد

بحقيقي هكذا

مثال

إذا كانت $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 7}$ أوجد $\frac{1}{2 \times 7}$

$$\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2)0 & (1)0 \\ (7-7) & (1)0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 7}$$

وكذلك $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2)2 & (1)(2-7) \\ (7-7)2 & (1)2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 7}$

والثانية، عنيفة ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى، ويمكن شروط معينة أثبت

شروط ضرب المصفوفات بما يلي:

$$\frac{1}{\text{مصفوفة}} \times \frac{1}{\text{مصفوفة}} = \frac{1}{\text{مصفوفة}}$$

وتعتبر ذلك أنه لضرب مصفوفتين لا يشترط تساوي الرقب، وإنما يجب

أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى (عدد مدخلات المأمود n) = عدد صفوف

المصفوفة الثانية (عدد مدخلات المصفوفة) والمصفوفة الناتجة تكون من رتبة $n \times n$

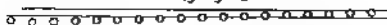
كما في المثال:

أي هكذا: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 7} \times \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 7}$

أوجد $\frac{1}{2 \times 7}$ ، إذا لممكن ذلك

وكذلك $\frac{1}{2 \times 7}$ ، إذا لممكن ذلك

المصفوفات والمحددات



$$\text{المصفوفة الممكنة لتساوي المتوسط (عدد أعمدة الأول 3)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

ب. عدد صفوف الثاني (3)

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

وأما كيفية إجراء عملية ضرب المصفوفات فتتم بالخطوات التالية وبإيجاز

شديد.

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 9 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

وتسهلنا لتعمل نموذج صفوف المصفوفة الأولى وعلى شكل أعمدة ممكنة.

$$\begin{pmatrix} 12 \times 8 + (0 \times 0) & (8 \times 0) & (0 \times 2) & (0 \times 4) & (0 \times 1) & (0 \times 3) \\ 12 \times 4 + (0 \times 1) & (0 \times 0) & (0 \times 2) & (0 \times 4) & (0 \times 1) & (0 \times 3) \\ 12 \times 12 + (10 \times 1) & (10 \times 0) & (10 \times 2) & (10 \times 4) & (10 \times 1) & (10 \times 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 144 & 10 & 20 & 40 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$(1) \leftarrow \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 14 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 + 11 & 0 + 12 \\ 48 + 14 & 0 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 107 & 12 \\ 62 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

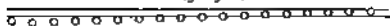
$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 9 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$$

وتسهلنا لنعمل نموذج صفوف المصفوفة الأولى وعلى شكل أعمدة ممكنة

$$\begin{pmatrix} 2 \times 7 + (8 \times 0) & (2 \times 6) + (8 \times 9) & (2 \times 10) + (8 \times 12) \\ 2 \times 0 + (8 \times 0) & (2 \times 1) + (8 \times 9) & (2 \times 2) + (8 \times 12) \\ 2 \times 11 + (12 \times 8) & (12 \times 0) + (12 \times 9) & (12 \times 2) + (12 \times 10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 72 & 104 \\ 0 & 73 & 100 \\ 142 & 108 & 156 \end{pmatrix}$$



المصفوفات والمحددات



$$(Y) \leftarrow \begin{pmatrix} 71 & 37 & 22 \\ 72 & 10 & 18 \\ 178 & 22 & 56 \end{pmatrix} =$$

ومن ملاحظة أن الجوابين 1 و 2 غير متساويين إذا بالضرب غير تبديلي

مُخصص مصيد ويهاجر شديدة:

الضرب ممكن عندما تتساوى عدد أعمدة المصفوفة الأولى مع عدد صفوف

الثانية هكذا

$$\text{الضرب ممكن} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

والضرب غير ممكن عندما لا تتساوى عدد أعمدة المصفوفة الأولى مع عدد

صفوف الثانية هكذا:

$$\text{الضرب غير ممكن} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

وعندما يكون الضرب ممكناً فإن $a \cdot b = c \cdot d$

الضرب المصفوفات غير تبديلي بشكل عام

وإذا ما ركزنا على المصفوفات المربعة من الرتبة 2×2 واستعملنا

المصفوفات الأخرى، فإن عملية الضرب دائماً ممكنة لتساوي الرتب يكون هذا

الشرط يحقق شرط الضرب بالمصفوفات والتقاليد عدد أعمدة المصفوفة الأولى =

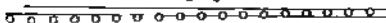
عدد صفوف المصفوفة الثانية

× عملية الضرب في المصفوفات تجميعية:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$





$$(١) \leftarrow \begin{pmatrix} ١٧ & ٢ \\ ٢٧ & ١٥ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٩ \\ ١٤ & ١٣ \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} \text{ وكذلك}$$

$$(٢) \leftarrow \begin{pmatrix} ١٧ & ٢ \\ ٢٧ & ١٥ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٩ \\ ٩ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}.$$

لأن الجوابين (١) ، (٢) متساويان

" والضرب يتوزع على الجمع في المصفوفات فكما هو أن

$$\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}.$$

$$(١) \leftarrow \begin{pmatrix} ١١ & ٦ \\ ٢٦ & ١٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} =$$

$$(٢) \leftarrow \begin{pmatrix} ١١ & ٦ \\ ٢٦ & ١٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٧ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٨ & ٩ \\ ١٤ & ١٣ \end{pmatrix} =$$

لأن الجوابين (١) ، (٢) متساويان

" أما عملية القسمة فهي يمكن تمثيلها في المصفوفات فكما هي في الأعداد

الحقيقية وعلى نفس النوال فكما في هذا المثال:

من المعلوم أن $٥ = ٦ \times ٥$ مقلوب العدد $٦ = ٥ \times ٥$ لتقدير الشروبي للعدد ٦

$$= ٥ \times \frac{١}{٦} \text{ هذا في حل الأعداد الحقيقية}$$



المصفوفات والحتميات



ويمكنني معالجة لهذه الطريقة متتاليات قسمة للمصفوفات، كما هو آت

$$= \frac{\frac{1}{2}}{2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

ولنبدأ بإيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة أو مقلوب المصفوفة المربعة

كما يلي:

$$\text{إذا كانت المصفوفة } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ وكان } (d \neq 0) - (b \neq 0) \text{ في صف}$$

$$\text{هذه للمصفوفة } \frac{1}{2 \times 2} \text{ نظير ضرب أو مقلوب يعبر له بالرمز } \frac{1}{2 \times 2}$$

$$\text{وإذا كان } a = b = c = d = 0 \text{ فلا يوجد للمصفوفة } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ نظير}$$

ضربي عندها تسمى المصفوفة مفردة Singular matrix

كما في الأمثلة التالية:

مثال

$$\text{هذه للمصفوفة } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ نظير ضربي}$$

$$\text{الحل: نجد } a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$$

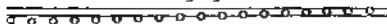
$$= 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$$

الجواب لا ليس لها نظير ضربي فهي مفردة

مثال

$$\text{هذه للمصفوفة } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ نظير ضربي}$$





مع ملاحظة أن العنبر في هذه الحالة فقط يعطي

$$\text{والجواب في الحالتين} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ مصفوفة الوحدة المحيطة للعنبر}$$

والآن نسمي المصفوفات المربعة من الدرجة $n \times n$ قتم كما يلي

$$\text{السم} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ على } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

مكون $\frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2}$ كلاًهما غير منموزة (تأكد من ذلك) فإن القسم بالرموز

$$\frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 2}$$

أي أنه حتى تقسم المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ على المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ فإن الجواب

$$\text{المصفوفة} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{فإنه نجد} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (التفسير الضمني)}$$

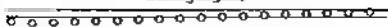
$$1 - 1 = 0 = (1 \times 1) - (1 \times 1) = 0 \neq 1 \text{ صفر}$$

$$\text{فإن} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{والآن} \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$





ملحوظته جديرة بالاهتمام:

هناك خاصية في المصفوفات لم ولن نجد لها مثيلاً في حقل الأعداد الحقيقية على الإطلاق، وهي:

يمكن أن يكون حاصل ضرب مصفوفتين هو المصفوفة الممثلة بـ 0
تكون أي من هاتين المصفوفتين المصفوفة الصفرية.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{هكذا،}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{وكذلك}$$

عندما نسمى هاتين المصفوفتين قواسم المصفوفة الصفرية، ونجاوزاً قواسم الصفر (في المصفوفات).

وهذه الخاصية تخالف القاسمية العامة في الأعداد الحقيقية الفارقة؛ إذا كان حاصل ضرب عددين حقيقيين هو الصفر، فإن أحدهما أو كلاهما يجب أن يكون صفراً وبالرموز:

إذا كان $a \neq 0$ ، $b = \text{صفر}$ ، لكل a ، $b \neq 0$

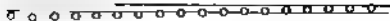
فإن $a = \text{صفر}$ ، $b = \text{صفر}$ أو كليهما

والتي نستخدم في حل بعض المعادلات التريمية في حقل الأعداد الحقيقية بطريقة التشغيل، لن نعامل حكماً مع سلبية.

$$(a \neq 0) \Rightarrow a = \text{صفر} \Leftrightarrow (a \neq 0) \Rightarrow (1 + 1) = \text{صفر}$$

$$\text{وعندها } a = 1 + \text{صفر} ، \text{ صفر} = 1 + \text{صفر}$$

$$\text{بما أن } a = 1 + 1 \Rightarrow 1 = 0.$$



(٧) (٤) المحددات:

أما المحددة Determinant:

لقد نتج معهوسها عن دراسة أنظمة المعادلات التفاضلية ثم تطور هذا المفهوم حتى شملت تطبيقاته مواضيع رياضية عديدة في مجالات العلوم مكانية فميكانيكا والاقتصاد والهندسة وعلم الاجتماع وغيرها.

ولمحدودات أعداد تحدد فيما إذا كان للنظام التفاضلي من معادلات خطية حل أم لا، والمحدد نفسه يستخدم لإيجاد هذا الحل إن وجد. كلما ميأتي فيما بعد. هذا ويرتبط بشكل مصفوفة مربعة عدد حقيقي يُسمى "محدد المصفوفة"

$$\text{فإذا كانت } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ مصفوفة مربعة}$$

فتمعرف بمحدد المصفوفة $\frac{1}{d-a}$ والتي يرمز لها بالرمز $\left| \frac{1}{d-a} \right|$ على النحو

$$\left| \frac{1}{d-a} \right| = \frac{1}{d-a}$$

مثال:

$$\text{إذا كانت } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ توجد } \left| \frac{1}{3-1} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{2-3}$$

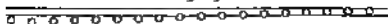
$$3 \times 2 - 1 \times 0 = 6 \quad (1) \quad (2) = \left| \frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6}$$

$$\text{وكذلك } \left| \frac{1}{2-3} \right| = \left| \frac{1}{-1} \right| = -1$$

$$(1) \times (2) =$$

$$6 = 1 \times -1 = -6$$





$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2} \quad \text{إذا كانت}$$

$$\left| \frac{1}{2 \times 2} \right| = \frac{1}{2 \times 2} \quad \text{المرجع}$$

• تبدأ بالصف الأول وتأخذ a_{11}, a_{12}, a_{13} ونمرق

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{أصغر}$$

بالطريقة التالية

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

مثال،

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2 \times 2} \quad \text{إذا كانت}$$

الحل،

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

ونضربه بالمحددات التالية بقول.

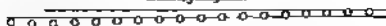
تأخذ العدد 2 من الصف الأول ونضربه بالمحدد الناتجة دون أخذ الصف أو العمود الذي يحتوي العدد 2 هكذا،

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 6 \times 5 = 12 - 30 = -18$$

ونأخذ العدد 4 من الصف الأول ونضربه بالمحدد الناتجة دون أخذ الصف أو العمود الذي يحتوي العدد 4 هكذا،

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 0 - 6 \times 7 = 0 - 42 = -42$$

المصفوفات والمحددات



$$\text{هكذا: } 1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \quad 21 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} \quad 11 = 10 - 21 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{ب: } 11 = 10 - 21 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

(iii) عند تبديل صف بمكان صف أو عمود بمكان عمود، لا مصفوفة مربعة فإن محددها (المصفوفة الجديدة) يساوي محددها (المصفوفة الأصلية) بالتقدير وتجاهلها بالإشارة.

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} \quad \text{بعد تبديل العمود الأول بالثاني}$$

$$\text{هكذا: } 1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 21 - 10 = 11$$

$$\text{ب: } 11 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 21 - 10 = 11$$

"إذا تقاسب صفات أو عمودات" أي إذا كان أحد الصفوف أو الأعمدة، لا مصفوفة ما يساوي عدداً ثابتاً مضروباً إلى الصف الآخر أو العمود الآخر فإن شبهة محددها (المصفوفة) يساوي صفر.

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} \quad \text{العمود الثاني = العمود الأول * العدد 2}$$

$$\text{أو الصف الثاني = الصف الأول * العدد 2}$$

$$\text{هكذا: } 1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 21 - 10 = 11$$

"إذا تكررت جميع مدخلات صف أو عمود، لا مصفوفة ما أسفار فإن قيمة محددها (المصفوفة) تلك يساوي صفرًا."

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 17 \end{vmatrix}$$

$$\text{هكذا: } 1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 21 - 10 = 11$$





(٧) تطبيقات على المحدثات والصقوفات

(١) نستخدم المحدثات في إيجاد معادلة الخط المستقيم الذي بالنقطتين $(١, ١)$ و $(٢, ٢)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ب (س) ، (س) حيث المعادلة تنتج من المحدثات}$$

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{اذ مكاتبنا (٢, ٢) ، (١, ١) ب (س) ، (س) حيث المعادلة تنتج من المحدثات}$$

$$\text{هكذا، (س) } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{من (١) ، (٢) : (٢ + ١) = ١ + ١ = ٢ = صفر$$

$$- ٢ = ٨ - ٨ = ٢٨ = صفر$$

$$\text{أو } ٨ = ٢ = ٢٨$$

$$\frac{٢٨}{٨} = \frac{٢}{٨} + \frac{٢٨}{٨}$$

$$\text{من } = - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}$$

ونستخرج من صيغة الحل:

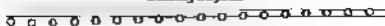
نجد (١) معادلة الخط المستقيم هكذا في الشان من - من \bullet م ، ب (س) - من (١)

وهذه تحليلة هكذا:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{2}{8-0} = \frac{2}{8}$$

$$\text{هكذا هو في المعادلة حيث حاصل من } = - \frac{1}{4}$$





وبو أو وحدة الكمالة بالهندسة الخطية

$$\text{حي} - \text{من} = \text{م} - \text{من} \quad (\text{من} - \text{من})$$

$$\text{من} - \text{من} = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2} \quad (\text{من} + \text{من})$$

$$\text{من} - \text{من} = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2} \quad (\text{من} - \text{من})$$

$$\text{من} - \text{من} = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2} \quad (\text{من} - \text{من})$$

$$\text{من} - \text{من} = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2} \quad (\text{من} - \text{من})$$

(أ) وهناك تطوي آخر على المحدقات هو إيجاد مساحة المثلث أ ب ج بمعرفة

إحداثيات رؤوسه كالتالي:

$$\text{أ: } (1, 1) \quad \text{ب: } (2, 2) \quad \text{ج: } (3, 3)$$

$$\text{ب: } (2, 2) \quad \text{ج: } (3, 3)$$

$$\text{ج: } (3, 3) \quad \text{من: } (1, 1) \quad \text{من: } (2, 2)$$

فإن مساحته يمكن إيجادها من المحددة:

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

وبما أن المساحة دائماً موجبة لذا نستخدم الإشارة السالبة أهلاً عندهم قول

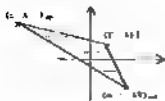
قيمة المحدد إلى مكملة مبالية لتصبح المساحة موجبة، وإلا فلنأخذ مستخدم الإشارة الموجبة دائماً

مثال:

أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه أ ب ج

$$\text{أ: } (1, 1) \quad \text{ب: } (2, 2) \quad \text{ج: } (3, 3)$$

$$\text{المساحة} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$





$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 9 & & \end{vmatrix} \frac{1}{9} \pm =$$

$$\text{المساحة} = \pm \frac{1}{9} [(1)(-)(9) - (9)(-)(1)]$$

$$= \pm \frac{1}{9} \{10 + 81\}$$

$$\pm \frac{1}{9} \{91\} \text{ وهنا نستخدم } - \frac{1}{9}$$

$$\therefore \text{ المساحة} = - \frac{1}{9} (91) = -10.1 \text{ وحدة مساحة}$$

(3) وهناك تطبيق ثالث على المحددات والمصفوفات مماً وهو حل نظام من المعادلات الخطية بثلاث متغيرات.

والآن يتم بطريقتين:

الأولى: بالمحددات وقاعدة كرومر بالذات

والثانية: بالمصفوفات وبمصفيات المعكوس البسيط بالثناكريد.

ولنبدأ بالطريقة الأولى:

لقد طور العالم السويسري كرومر (1704 - 1757) م عام 1750 م طرناً خاصة باستخدام المحددات لحل أنظمة من المعادلات الخطية

بثلاث متغيرات على الصورة: $ax + by + cz = d$

ولذلك مثببات على الصورة: $ax + by + cz = d$

كما يلي

× قاعدة كرومر Cramer's Rule لا حل للمعادلات الخطية

مثال:

أوجد مجموعة كحل النظام $x + y + z = 2$

من $x - y = 4$ من مستخدماً قاعدة كرومر



يجب وضع المعادلات الخطية على الصورة I من A ب X = B كالتالي

فقط هكذا:

$$\begin{matrix} \text{المصفوفة} & \text{المصفوفة} & \text{المصفوفة} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

حيث A = مصفوفة المعاملات

X = مصفوفة المتغيرات

B = مصفوفة الثوابت

ثم نجد قيمة المحددات التالية:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(4) - 2(3) = 4 - 6 = -2$$

$|A_1|$ باستبدال عناصر المصفوفة الأولى (الثوابت)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 5(8) - 6(7) = 40 - 42 = -2$$

$$|A_2| = 2 \times 2 = 4$$

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$|A_2|$ باستبدال عناصر المصفوفة الثانية (الثوابت)

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1(7) - 5(3) = 7 - 15 = -8$$

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

مجموعة الحل للنظام $\{X_1, X_2\}$



البرمجة الخطية فهي حل الأنظمة الخطية بالمصفوفات وتتم بحفيزات الصف البسيط Simple Row Operations كما في المثال:

مثال

أوجد مجموعة الحلول للنظام من $x + y = 9$ و $x + 2y = 18$ باستخدام عمليات الصف البسيط وطريقة الحل بالشريط من الأعلى.

* نكتب ما يسمى بالمصفوفة الموسعة Expansion matrix هكذا:

والمصفوفة الموسعة هي التي تتكون من معاملات المتغيرات والثوابت (الحدود المعلقة) في النظام هكذا يلي:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 18 \end{array} \right]$$

ثم نحول هذه المصفوفة إلى مصفوفة أخرى على الشكل:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 9 \end{array} \right] \text{ حيث ننسحب الأيمن منها مصفوفة الوحدة}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ والأيسر منها مجموعة + يسار}$$

لنظام (س، ص)

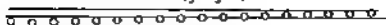
وذلك بإحدى أو أكثر من العمليات التالية:

* تبديل ترتيب صفوف المصفوفة الموسعة كأن تبديل الصف الأول بالثاني والمكسور.

* ضرب أي صف في المصفوفة الموسعة بعدد حقيقي معاير للصفر ثم حمله أو طرحه من صف آخر.

ومن هنا جاء اسم عمليات الصف البسيط.

وأما نحن هكذا



طرحاً $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$ نجعل كل معكزة من المدخلات داخل الدوائر بنقطة واحد. ميسر والباقي أصغر

مكسراً يلي:

$$\frac{1}{3} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \text{ اطرح الصف الثاني من الصف الأول}$$

أضرب الثاني $\frac{1}{3}$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \text{ اطرح الثاني من الصف الأول}$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

أي أن $3 = 2$ ، $6 = 3$

عددان تكون مجموعة الحل $\{ (2, 6) \}$ تحقق من صحة ذلك الجواب.

وبنفس الطريقة عمليات الصف المبسط هذه حل أنظمة من المعادلات الخطية التي تحتوي على ثلاثة متغيرات كما يلي

مثال:

حل النظام:

$$3x + 2y + z = 1$$

$$2x + 3y + z = 2$$

$$x - 2y - z = 3 \text{ بطرقة الصف المبسط}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ انقلب الصفوف للوسعة}$$





ودخول مصفوفة المعاملات فيها الى مصفوفة الوحدة كالتالي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ الى مصفوفة الوحدة } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ان أمكن ذلك}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ الى } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وهي متكافئة لمجموعة الحل للنظام أي: $\{x, y, z\}$ هكذا؟

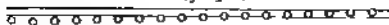
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1, R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \text{مربى الثالث بالعدد } \frac{1}{7} \text{ وإضافته إلى الثاني} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\Rightarrow \text{مربى الثالث بالعدد } -1 \text{ وجعله إلى الأول} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

$$\Rightarrow \text{مربى الثاني بالعدد } 1 \text{ وجعله إلى الأول} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

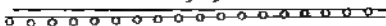
$$\text{وعنه } R_3 = R_3 - 7R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -6 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

مجموع الحل للنظام = $\{(1, 0, -1, 1)\}$

تتحقق من صحة الحل بطريقة كروية

ملحوظة:

طريقة كروية لحل النظام من المعادلات الخطية بمشهور أو ثلاثة متغيرات هي الأسهل، ولكن طريقة المصفوفة البسيطة هي الأشهر، والتوضيح سيأتي في الفصل لاحق من هذا المؤلف



(٧ ٦) أمثلة محلولة على المصفوفات والمحددات

مثال (١) :

موسى ومحمود ومعين ثلاثة مزارعين يمتلكون ثلاث مزارع الخصبية
يزرع موسى في مزرعته ١٥٠ شجرة ليمون، ١٢٠ شجرة برتقال، ٥٠ شجرة مندس
ويزرع محمود في مزرعته ٨٠ شجرة ليمون، ١٠ شجرة برتقال ولم يزرع مندسها على الإطلاق
ويزرع معين في مزرعته ٢ شجرة ليمون، ١٧ شجرة برتقال، ٢٠ شجرة مندس
رتب المعلومات السابقة في جدول بسيط ثم اكّتب المصفوفة التي تمثل هذا
الجدول.

الحل :

هناك شكلان بالجدول مما :

الشكل الأول :

المزرعة \ الشجرة	ليمون	برتقال	مندسها
مزرعة موسى	١٥٠	١٢٠	٥٠
مزرعة محمود	٨٠	١٠	٠
مزرعة معين	٢٠٠	١٧	٢٠

أما المصفوفة التي تمثل هذا الجدول فهي :

$$\begin{pmatrix} 150 & 120 & 50 \\ 80 & 10 & 0 \\ 200 & 17 & 20 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

الشكل الثاني:

شجرة شروية	مزرعة موسى	مزرعة مصدود	مزرعة مهن
ليمون	١٥٠	٨٠	٢٠٠
برتقال	١٢٠	١٠٠	١٧٠
مكثفيا	٥٠	٠	٢٠

أما المصفوفة التي تمثل هذا الجدول فهي:

$$\begin{pmatrix} 200 & 80 & 150 \\ 170 & 100 & 120 \\ 20 & 0 & 50 \end{pmatrix} = \begin{matrix} ٢ \\ ١ \\ ٢ \end{matrix}$$

الملاحظ أن $\begin{matrix} ٢ \\ ١ \\ ٢ \end{matrix} \neq \begin{matrix} ٢ \\ ٢ \\ ٢ \end{matrix}$ مع أنها نفس المعلومات لكن المصفوف أحدها أصبحت أعيدت في الأخرى والعكس

مثال (٢):

ما قيمة المتغيرين إذا كان:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

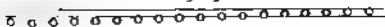
بعد أن المصفوفين متساويين فإن مدخلاتها المتناظرة متطابقة.

أي أن $5 = 7$ و $6 = 7$

من $5 = 7$ و $6 = 7$ مصفر

من $6 = 7$ و $7 = 6$ مصفر

من $6 = 7$ و $7 = 6$ قيمة من $\{ -1, 1 \}$



مثال (3):

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

حيث: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$ أوجد، بكل ما يلزم، إذا أمكن:

$$(1) \quad \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} \quad \text{يمكن تكوينها من نفس الرتبة}$$

والجواب:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} \quad \text{يمكن تكوينها من نفس الرتبة}$$

والجواب:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال (4):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

أوجد، إذا كان ممكناً:

$$(1) \quad \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} \quad \text{يمكن تكوين عدد أصغر الأول = عدد صفوف الثانية = 2}$$

والجواب: $\frac{1}{2 \times 2}$ ممكن

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$





$$\begin{pmatrix} A & Y & - & 17 \\ 24 & - & 1 & - & 16 \end{pmatrix} =$$

(ii) $\frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$ لا يمكن تكوين عدد أعيرة الأول \neq عدد صفوف الثاني
لأن $2 \neq 2$

مثال (٥) :

$$\begin{pmatrix} 2 & - & 0 \\ 2 & & . \end{pmatrix} = \text{إذا كانت } 2 \times 2$$

فارجد 2×2 إذا أمكن

(i) $\frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$ يمكن تكوين عدد أعيرة الأول = عدد صفوف الثاني 2×2

والجواب:

$$\begin{pmatrix} 2 & - & 10 & - & 20 \\ 1 & + & 0 & + & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & - & 0 \\ 2 & & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & - & 5 \\ 2 & & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & - & 20 \\ 1 & & . \end{pmatrix} =$$

(ii) $0 \frac{1}{2 \times 2} =$ دائماً يمكن هذا النوع من الضرب \cdot عدد حقيقي \neq مصفوفة

والجواب:

$$\begin{pmatrix} (2) (-) (5) & (5) (5) \\ (2) (5) & (-) (5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & - & 5 \\ 2 & & . \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 10 & - & 20 \\ 1 & & . \end{pmatrix} =$$

مثال (٦) :

أوجد النظير العنصري لكل من المصفوفات إذا كان لها نظير ضربي

المصفوفات والمحددات

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (j)$$

محدد المصفوفة = $(1 \times 1) - (2 \times 1) = 1 - 2 = -1$ لها نظير ضربي

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{-1} & \frac{1}{-1} \\ \frac{2}{-1} & \frac{1}{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (ii)$$

محدد المصفوفة = $(1 \times 1) - (2 \times 1) = 1 - 2 = -1$ عنصر

هذه مصفوفة ليس لها نظير ضربي

$$\begin{pmatrix} \text{جانس} & \text{جتنس} \\ \text{جتنس} & \text{جانس} \end{pmatrix} \quad (iii)$$

محدد المصفوفة = $(\text{جانس}) - (\text{جتنس}) = (\text{جانس}) - (\text{جتنس})$

$$= \text{جانس} - \text{جتنس} = \text{جانس} - \text{جتنس} = \text{جانس} - \text{جتنس}$$

$$= (1) - (1) = 0 \text{ لا يوجد لها نظير ضربي}$$

$$\begin{pmatrix} \text{جانس} & \text{جتنس} \\ \text{جتنس} & \text{جانس} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-1} \begin{pmatrix} \text{جانس} & \text{جتنس} \\ \text{جتنس} & \text{جانس} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{جانس} & \text{جتنس} \\ \text{جتنس} & \text{جانس} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{جانس} & \text{جتنس} \\ \text{جتنس} & \text{جانس} \end{pmatrix}$$

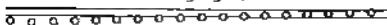
واللاحظ أن النظير الضربي للمصفوفة هو نفس المصفوفة.

مثال (٧):

أوجد معادلة المستقيم الذي ياتبعه:

أ (١، ٥) ب (٦، ٨) والمحددات أولاً وبثنتين الخطة التحليلية ثانياً





$$\text{معادلة الخط المستقيم ناتجة عن المحددة} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \text{صفر هكندا}$$

$$\text{من} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - \text{من} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

أي أن وبعد تلك المحدودات:

$$\text{من} (4 - 8) - \text{من} (0 - 6) + 1(6 - 48) = \text{صفر}$$

$$- 4 + 6 - 42 = \text{صفر}$$

$$\text{أو} \boxed{\text{من} 4 = \text{من} 16}$$

أما بعد بقوانين الهندسة التحليلية فهكندا:

معادلة الخط المستقيم:

$$\text{من} = \text{من} 1 + \text{م} - \text{من} 1 \text{ حيث } \text{م} \text{ هو ميل الخط المستقيم}$$

$$1 = \frac{4 - 8}{0 - 6} = \frac{\text{من} - \text{من} 1}{\text{من} - \text{من} 1} = \text{م}$$

ولمأخذ النقطة (4, 8)

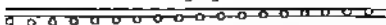
$$\text{فمن} \text{من} - 1 = 1 \Rightarrow 4 - \text{من} = 4$$

$$\text{من} - 4 = 4 - \text{من}$$

$$\text{من} 4 = 4 + 20$$

$$\boxed{\text{من} 4 = \text{من} 16}$$

الجواب نفسه إلا الطريقتين.

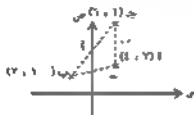


شكل (٨)

حسب مساحة المثلث $آ ب ج$ الذي رؤوسه النقط:

$$آ (٢, ١) \text{ ب } (٤, ٢) \text{ ج } (١, ٢)$$

المساحة بالمحددات هي: $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$



$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

أما الحل بالقانون:

$$\sqrt{٢٠} = \sqrt{٢٠} = \sqrt{٢٠} = \sqrt{٢٠}$$

$$\sqrt{٢٠} = \sqrt{٢٠}$$

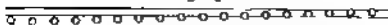
$$\sqrt{٢٠} = \sqrt{٢٠}$$

$$\sqrt{٢٠} = \sqrt{٢٠}$$

$$\sqrt{٢٠} = \sqrt{٢٠}$$

$$\sqrt{٢٠} = \sqrt{٢٠}$$





$$\sqrt{(2\sqrt{5} + 2\sqrt{2})(2\sqrt{5} - 2\sqrt{2})} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2}$$

$$2\sqrt{2 \times 2 \times 5} = 2\sqrt{20} = (2 \times 2)\sqrt{5}$$

$$2\sqrt{20} = 2 \times 2\sqrt{5}$$

الجواب نفسه 2 بالطريقةتين.

مثال (4):

أوجد مجموعة الحل لنظام بطرقتين:

$$(1) \quad x - y = 1$$

$$(2) \quad x + y = 5$$

$$x + y = 5 \quad (2) \quad (1) - (2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$y =$$

أمر 1 = باستبدال معادلات المعادلات الأولى بالثوابت

$$(1) \quad (1) - (2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$x + y = 5$$

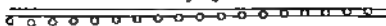
أمر 2 = باستبدال معادلات المعادلات الثانية بالثوابت

$$(1) \quad (1) - (2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\frac{x + y}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{12 - y}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\left\{ \frac{12 - y}{2}, \frac{y + 5}{2} \right\} = \text{مجموعة الحل}$$



مثال (١٠):

إذا كانت $Y = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $XY = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$Y = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أوجد X من (١) $XY = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ من (٢) $Y = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$[YA] = [1 \ 2 \ 3] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$1 = 1 \quad 2 = 2 \quad 3 = 3$$

أو (٢) $Y = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$7 \times 7 = 49 \quad 8 \times 8 = 64 \quad 1 \times 1 = 1$$

لكن $Y = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ من X ولكن ليس هذا فحسب وإنما الفارق عاقل جداً (١١)

مثال (١١):

$$\begin{vmatrix} 12 & 14 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 1$$

إذا كان $12 \times 14 = 168$

الحل:

$$168 = (12 \times 14) \quad (10 \times 15) = \begin{vmatrix} 12 & 14 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 1$$





$$197 = 12 \times 17$$

$$17 \times 12 = 197 - 200$$

$$17 = 12$$

$$\frac{17}{1} = \frac{17}{12} = \frac{17}{12} = \frac{17}{12}$$

مثال (١٢)

$$\text{ما قيمة } k \text{ التي تجعل المصفوفة } \begin{pmatrix} 2 & (k+2) \\ (k+2) & 2 \end{pmatrix} \text{ منسجمة؟}$$

حتى تكون مصفوفة منسجمة يجب أن تكون $|A| = 0$ صفر

$$\begin{vmatrix} 2 & (k+2) \\ (k+2) & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 \times 2 - (k+2)^2 = 0$$

$$4 - (k+2)^2 = 0 \Rightarrow (k+2)^2 = 4$$

$$(k+2)^2 = 4 \Rightarrow k+2 = \pm 2$$

$$k+2 = 2 \Rightarrow k = 0$$

$$k+2 = -2 \Rightarrow k = -4$$

$$k = 0 \text{ أو } k = -4$$

مثال (١٣)

إذا كانت إيرادات ثلاث سلع مثبته شركة مقفلة بالكمبيوتر هي:

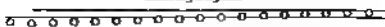
$$4500, 3200, 4000$$

وكانت تكاليف إنتاج هذه السلع بالكمبيوتر على الترتيب هي:

$$1200, 2000, 2400$$

احسب صافي أرباح الشركة في كل سلعة باستخدام المصفوفات





بما أن الأرباح = الإيرادات - التكاليف

$$\text{مصفوفة الإيرادات} \begin{pmatrix} 2500 \\ 3700 \\ 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{مصفوفة التكاليف}$$

$$\text{مصفوفة التكاليف} \begin{pmatrix} 1700 \\ 2000 \\ 2600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{مصفوفة الربح} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 3700 \\ 1500 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1700 \\ 2000 \\ 2600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 1700 \\ 2100 \end{pmatrix}$$

مثال (١١):

$$(1) \text{ من النظام: } 2x - 3y + z = 8$$

$$4x + 2y - 3z = 8$$

$$10x + 5y - 3z = 10$$

بطريقة كوكريمر

الحل بطريقة كوكريمر:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 10 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 10$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 10 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 10 \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 10 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 10$$

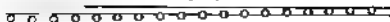
$$(1 - 2)1 + (1 + 1)2 + (8 + 2)2 =$$

$$(2 - 1)(1) + (10)(2) + (6)(2) =$$

$$20 = 2 \quad 10 + 2 =$$



المصفوفات والمحددات



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 10 \end{vmatrix} = |A|$$

$$(20 - 22)1 + (20 + 4 - 2)2 + (4 + 2 - 2)2 =$$

$$(2)(1) + (22)(2) + (4)(2 - 2) =$$

$$2 + 44 + 0 =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \end{vmatrix} = |A|$$

$$(21 - 10)1 + (2 + 1 - 2)2 + (20 + 4 + 2)2 =$$

$$(11 - 2)1 + (1)2 + (22)2 =$$

$$9 + 2 = 11 + 2 = 13$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 2 \end{vmatrix} = |A|$$

$$(2 - 1)2 - (21 - 2)2 + (22 - 20)2 =$$

$$(2 - 2)(2) - (19 - 2)(2) + (2 - 2)(2) =$$

$$22 - 19 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$1 \cdot \frac{20}{22} = \frac{10}{11} \text{ من } 2 = \frac{20}{22} \text{ من } 2 = \frac{20}{11} = \frac{20}{11} = \frac{20}{11}$$

مجموعة الحل = $\{(1, 2, 2)\}$ بطريقة تكرير

(ii) حل النظام من $20 = 22$ من $20 = 22$

$$2 = 22 - 20 = 2$$

بمصفوفات المصفوفة البسيطة $2 = 22 + 20 = 22$





الحل

نبدأ بحساب المصفوفة العكسية:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ونحولها الى } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{المشكل}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

عندئذ مجموعة الحل = $\{(x, y, z) \mid x = 1 - y - z, y = y, z = z\}$

كذلك ينطبق

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \leftarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \div$$

$$\therefore \text{ من } 1 = 0, \text{ من } 2 = 0, \text{ من } 3 = 0$$

$$\text{مجموعة الحل} = \{(1, 2, 3)\}$$

مثال (١٥)،

ما قيمة من التي تحقق للمساواة بين المصفوفتين

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

بما ان المصفوفتين متساويتان فإن مدخلاتها المتناظرة متساوية

$$\therefore \text{ من } 2 = 5 \text{ من } 0 = 4 \quad (1) \quad \text{و} \quad \text{من } 7 = 7 \text{ من } 8 = 8$$

$$\text{من } 2 = 5 \text{ من } 0 = 4 \quad \text{من } 7 = 7 \text{ من } 8 = 8$$

$$\text{من } (2 = 5) \text{ من } 7 = 7 \text{ من } 8 = 8$$

$$\{2, 5\} = \{7, 8\}$$

، القيم من التي تحقق المساواة هي:

$$\{2, 5\} \text{ فقط}$$

$$\text{حيث من } 2 = 5 \quad \text{لا تحقق المساواة}$$

مثال (١٦)،

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

إذا كانت $3 \neq 2$

إذا كان ذلك ممكنًا أوجد:



الحل:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} 4 - 1 & 2 + 2 \\ 4 + 2 & 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 - 1 & 2 \\ 4 + 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

الطرف الأيسر =

مثال (١٨)،

ما قيمة كل من a ، b إذا كان

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 = 2 & 2 = 2 & 0 = 1 \\ 0 = 0 & 0 = 2 & 0 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 20 + 2 + 2 & 18 - 12 + 1 \\ 5 + 5 + 5 & 6 + 1 - 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 + 2 & 18 & 12 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} =$$

وبما أن المصفوفتين متساويتان فإن مدخلاتهما بالناظرة متساوية أي مساوية

المصفوفات والمحددات



$$z = 1 \leftarrow 1z + 1z \leftarrow (1) \quad y = 1z - 1z$$

$$\text{وممكنك } y = 10 + 1z \leftarrow (2) \quad 1z = 1z - 1z \leftarrow 1z = 0$$

$$z = 1$$

$$y = 0$$

مثال (١٩)،

اكتب مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت والمصفوفة الموسعة للنظام

$$3x + 2y = 5$$

$$4x - 2y = 1$$

$$3x + 2y = 5$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \times 2} \text{ مصفوفة المعاملات}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \times 2} \text{ مصفوفة الثوابت}$$

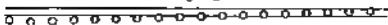
$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ المصفوفة الموسعة}$$

مثال (٢٠)،

اكتب قيمة كل من المصفوفات التالية A, B, C, D

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$





الحل:

$$\begin{pmatrix} (3-)- & - & (2-)-1 & (1-)-2 \\ 7 & 4 & - & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

والأول: المصفوفة في الصف الأول والعمود الأول = 1

المصفوفة في الصف الثاني والعمود الثاني = 6

المصفوفة في الصف الثاني والعمود الثالث = - 3

المصفوفة في الصف الثالث والعمود الثاني = 0

(حيث لا يوجد صفا ثالث في المصفوفة.)

المصفوفات والمحددات



(٧ ٧) أمثلة وتدريبات وتعاريف تتعلق حلولاً من الدارسين والدارسات

$$(١) \text{ يوجد محدد المصفوفة } \frac{1}{2 \times 2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(٢) \text{ يوجد ناتج جمع } \begin{pmatrix} 2 & 1 & - \\ 2 & & 0 \\ 2 & 0 & - \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & - \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(٣) حل المعادلة المصفوفية:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & - \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(٤) اكتب المصفوفة المربعة:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(٥) حل المعادلة المصفوفية

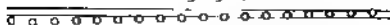
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & - \end{pmatrix}$$

$$(٦) \text{ إذا كانت } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

$$\frac{1}{2 \times 2} = \frac{2}{2 \times 2} + \frac{2}{2 \times 2} \quad \frac{1}{2 \times 2}$$

حيث $\frac{2}{2 \times 2}$ مصفوفة الوحدة ، $\frac{1}{2 \times 2}$ المصفوفة المربعة





(٧) اجب عمليات الضرب التالية إذا كانت ممكنة:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\{ \text{غير ممكنة} \} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(A) \text{ اوجد حاصل ضرب } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(٩) باستخدام طريقة كراميرس لحل المعادلات الخطية، ما قيمة x من 1 من

فهما يلي

$$(1) \quad 0 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$(2) \quad \text{مفرد} = \frac{2}{x} - \frac{11}{x}$$

$$\{ \text{ارسلادة افترض } 1 = \frac{1}{x}, 0 = \frac{1}{x} \}$$

$$\{ \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x} \right) \}$$

(١٠) اوجد مجموعة الحلول للنظام بالمحددات (طريقة كراميرس):

$$x + 2y = 6$$

$$x - 2y = 4$$

$$2x + 3y = 7$$

$$\{ \left(\frac{12}{11}, \frac{12}{11}, \frac{8}{11} \right) \}$$



(١٧) حل المادلات المعطوفة التالية

$$\begin{pmatrix} Y & T & d \\ A & Y & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & T & U^d & 1 \\ A & 1 + U^d Y & E & \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\{(\gamma, v)\} \cup \{\gamma, e - 1\}$$

$$\begin{pmatrix} Y & Y & 1 \\ Y & Y & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{Y^2 + Y} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (1A)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{y} & \bar{x} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\bar{y}^2 \bar{x}}$$

$$\begin{pmatrix} Y & 1 & 0 \\ 1 & Y & 0 \end{pmatrix} = \frac{-2}{Y+Y}$$

[illegible]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 \times 1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

اوجھد : س^۱، س^۲، من^۱+من^۲، من^۱-من^۲، من^۱س^۱، من^۱س^۲

(٧٠) أي من المصفوفات التالية منفردة والملاذ

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y & Y \\ Y & Y \end{pmatrix} &= \frac{1}{Y \times Y}, \quad \begin{pmatrix} Y & Y \\ Z & Y \end{pmatrix} = \frac{1}{Y \times Y} \\ \begin{pmatrix} Y & Y \\ Y & Z \end{pmatrix} &= \frac{1}{Y \times Y}, \quad \begin{pmatrix} Y & Y \\ Y & Z \end{pmatrix} = \frac{1}{Y \times Y} \end{aligned}$$

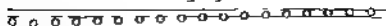
{ المصروفة $\frac{3}{2 \times 2}$ لأن محلدها = صعر }

(۲۶) بین ان المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

منعقدة
(إرشاد: =

{أرضاء = تعجبنا = صدمنا}



$$(22) \text{ د. مكافئ للمصفوفة } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ مقفولة ضما قيمة مرسى} \\ \left\{ 2, \frac{2}{3} \right\}$$

$$(23) \text{ حل النظام. } \begin{matrix} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 5y = 2 \end{matrix}$$

بعمليات الصف البسيط

$$\{ (17, -1) \}$$

(24) اجر عملية ضرب كل من المصفوفتين إذا كان ذلك ممكناً

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

{ ارشاد: الأولى ممكن والثانية لا }

(25) معر. ثنائي بيع ثلاثيات ولفزيونات، باع في الأسبوع الأول من عام ٢٠١٥م

ثلاث ثلاثيات وأربعة تلفزيونات، وفي الأسبوع الثاني باع أربع ثلاثيات وخمسة

تلفزيونات، وفي الأسبوع الثالث باع ٧ تلفزيونات، وفي الأسبوع الرابع باع

ثمانية ثلاثيات، رتب هذه المعلومات في مصفوفة.

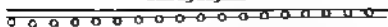
{ ارشاد: هناك مصفوفتان لترتيب هذه المعلومات }

$$(26) \text{ ما حدد مدخلات كل من المصفوفات:} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = I$$

(27) حل المعادلة المصفوفية الآتية

$$\{ 2, 3 \} \quad \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3x + 15 \\ 2 & 5 + 3y \end{pmatrix}$$





(٢٤) احسب قيمة محدد من المصفوفات:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & - \\ 2 & 4 & 1 & \\ 2 & 5 & 3 & \\ 2 & 2 & 1 & \end{vmatrix} \quad (١)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 & \\ 2 & 5 & 3 & \\ 2 & 2 & 1 & \end{vmatrix} \quad (٢)$$

{ صفير = ٢٧ }

(٢٥) حل المعادلتين ٢ من ٣ من ٨ -

٢ من ٧ - ٥ من ٢ = - بالمحددات.

{ (٢ ، ١) }

(٢٦) حل المعادلات الثلاث:

$$٢ \text{ من } ٤ + \text{ من } ٢ + \text{ ح } ٥ =$$

$$٥ \text{ من } ١ - \text{ من } ٤ - \text{ ح } ٢ =$$

$$١ - \text{ من } ٤ + \text{ من } ٥ + \text{ ح } ٢ =$$

بالمحددات

{ (١ ، ٢ ، ٥) }

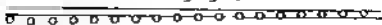
$$\begin{pmatrix} 2 & - \\ 2 & \end{pmatrix} = \frac{2}{1 \times 2} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & - \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 1}$$

أوجد ١ ب ، ب ١ - إذا كان ذلك ممكناً

(٢٨) حل المعادلة المصفوفية:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ \text{من} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \text{من} \\ 2 & - \end{pmatrix}$$





(٣٩) توجد حاصل ضربية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

الاقترانات الجبرية
Algebraic Functions

٨) (١) الأنماط Patterns

الأنماط، وبفردتها نمط، والنمط هو التسوق أو لتتوالى أو الأسلوب الذي يسير بمقتضيه في التجزئ معظام أعمالنا اليومية، فكلما أصبح منا نحن البشر بالذات وأكبر ويشرب ويديم ويكتب في بعض الأحيان، صمليات الأكل، والشرب، والنوم، والكتابة جميعها بلا استثناء يسير على أنماط، وكتابتها مؤثرات على سريان الحياة في أجسامنا، كونها تنقي عنا جمود القضاء، هذا من ناحية عامة

أما في الرياضيات فالأنماط هي الموضوعات الرياضية البهية لأنها تسير بطرق يمكن تعددتها بقواعد رياضية ليسهل عليها التعامل معها وتفسيرها بأسلوب صحيح كونها تكشف لنا علاقات الهمك بين المفاهيم وما ينتج عنها من قوانين والقرائنات

مثال:

إذا حددت إدارة المرور في إحدى البلدان أجراً للراكب في لحافلات العمومية، المنتشرة هناك من خلال عدد الحافلات بحيث تبدأ دورة العداد بـ ٢٥ قرشاً عند ركوب الشخص في الحافلة، ويضاف بعد ذلك ١٥ قرشاً لقاء كل كيلومتر واحد تقطعه الحافلة بالنظام.

من هذه المعلومات يمكن التعرف على مقدار أجرة الراكب وفق الجدول التالي، تكون القاعدة تسير على مبسط ومبسط هو:

المسافة المقطوعة بالكيلومتر	أجرة الراكب بالقرش
1	$1 + 25 = (15) 1 \times 15$ قرشاً
2	$2 + 25 = (10) 2 \times 15$ قرشاً
3	$3 + 25 = (15) 3 \times 15$ قرشاً
⋮	⋮
١٥	$15 + 25 = (10) 15 \times 15$ قرشاً



وهذه هي القاعدة للنتيجة عن القسط السابق.

وسكان الأنماط تحول إلى نهايتها إلى علاقات بين المتغيرات، وهذا وفي حد
السؤال بالذات، هناك علاقة بين المسافة المقطوعة بالكيلومترات ولجركه الركاب
بالعروش، كتشتمت بنتيجة القسط السابق.

لذا فالأنماط تتج من التواعد ما يطلق عليها "الافتراضات"

فالقسط السابق أنتج الافتراض التالي:

$$y = 20 + 10x$$

حيث: y من عدد الكيلومترات المقطوعة

x في قيمة الأجرة المقطوعة.

فأجرة الركاب على سبيل المثال عندما يقطع 7 كيلومترات بالمحطة نفسها هي:

$$y = 20 + 10x = 20 + 10 \times 7 = 90 \text{ قرشاً.}$$

وهكذا ...

٨-٢) الافتراض الجبري Algebraic Function:

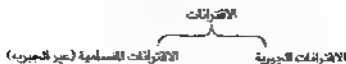
الافتراضات الجبرية التي نحن بصدد مناقشتها الآن، كمتبر ومكتوبة أساسية
من رموز الرياضيات كقواعد المادة الخلق موضوعات متعددة وعامة إلى الرياضيات
كالتفاضل والتكامل وغيرها من الموضوعات، كما
سيوضح فهم جيد، وفي هذا المؤلف بالذات.

من المعروف أن الافتراض علاقة بين عناصر مجموعتين، يرتبط فيها بكل
عناصر المجموعة الأولى (Domain) بعنصر واحد فقط من
عناصر المجموعة الثانية (Range).

والافتراضات التي مجالها ومجالها مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية ح
يطلق عليها اسم الافتراضات الحقيقية Real Functions، والافتراضات الجبرية ما هي إلا



قسم هلم جداً من أقسام الاقتربات الحقيقية بموجب التقسيم التالي:



والاقتربات الجبرية هي الاقتربات التي ترتبط فيها المتغيرات (س ، هـ) مثلاً بعلاقة تتمثل بتأخذ هـ = س + ق (س)

حيث س يسمى المتغير المستقل ، هـ يسمى المتغير التابع

ونظم الاقتربات الجبرية الأنواع التالية من الاقتربات

كثيرات الحدود

الاقتربات القيمة المطلقة

الاقترب أكبر عدد صحيح أو الكسري أو السلمي

الاقتربات نسبية

الاقتربات مبهورة

ومناقش جميع هذه الأنواع في هذا الفصل بالذات

وأما الاقتربات المسماة أو غير الجبرية فتتضمن الأنواع التالية من الاقتربات:

الاقتربات الدائرية وهي التي ترتبط بالزوايا ارتباطاً وثيقاً

والاقتربات الأسية وعلى وجه الخصوص الاقتربات الأسية الطبيعية بالأساس

هـ (المعد التاييري) فتأخذ ق (س) = هـ^س

والاقتربات اللوغارتمية: وعلى وجه الخصوص الاقتربات اللوغارتمية الطبيعية

للأساس هـ (المعد التاييري) وتأخذ ق (س) = لور س

ومناقشتها في أماكنها من هذا المؤلف، لذا يجب التنويه





٨٢ (٣) أنواع الاقتربات الجبرية Types of Algebra Functions

(١) كثيرات الحدود Polynomial Functions:

كثيرات الحدود مجموعة من الاقتربات الحقيقية الجبرية والتي تشترك جميعها بالصورة العامة الواحدة للقلعة التالية:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

لكل n عند صحيح غير سالب (صفر وموجب)

والأعداد الحقيقية a_0, a_1, \dots, a_n قسمي العوامل Co-factors

والقوى power أو الأسس exponents $n, n-1, \dots, 1, 0$ حيث 0 لحدود درجات Degree هذه الاقتربات.

هذا وتصنف كثيرات الحدود إلى الاقتربات التالية:

× الاقتربان الصفرى Zero Function:

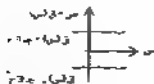
فاهمه في (ن) = صفر ، ومنحناه محور السينات بالذات ، ولا درجة له هي الإمكان ، مكملاً في الشكل:

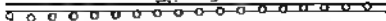


× الاقترب الثابت Constant Function:

فاهمه في (ن) = a ، لكل x ج

ومنحناه يمثل مستقيماً يوازي محور السينات ويبعد عنه بمقدار a وحدة ومن الدرجة الصفرية كما في الشكل:





هنا

(١) ميل الاختزان الخطي هو ١ سكونها يتأخر ميل للمستقيم من -٢ من $+$ ج وهو م

(معكسة تحليلية) قيم الاختزان الخطي في (س) $= ٢ - ٤$ هو ٢

وميل الاختزان الخطي ه (س) $= ٨ - ٦$ من هو ٢

(٢) اذا كان $١ <$ صفر يكون في (س) متزايد، أي أن قيمة الاختزان في (س) تزداد

بزيادة قيمة س



مثل: في (س) $= ٢$ من ٠ ج ،

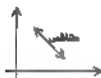
$$\text{في (١) } ٢ = (١) ٢ + ٠ = ٨$$

$$\text{في (٢) } ٢ = (٢) ٢ + ٠ = ٨$$

أي أن س تزداد من ١ إلى ٢ ، في (س) تزداد أيضاً من ٨ إلى ٨

(٣) إذا كان $١ >$ صفر يكون في (س) متناقص، أي قيمة الاختزان في (س) تقل

بزيادة قيمة س



مثل: في (س) $= ٥ - ٢$ من

$$\text{في (١) } ٥ = (١) ٢ - ٢ = ٢$$

$$\text{في (٢) } ٥ = (٢) ٢ - ٢ = ٢$$

أي أن س تزداد من ١ إلى ٢ تقل قيمة الاختزان من ٢ إلى ٢

(٤) وعندما $١ =$ صفر فالاختزان في (س) $= ٠$ من $+$ ب يتحول إلى الاختزان ثابت

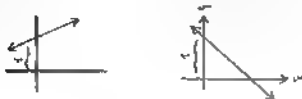
في (س) $= ٠$ ب يصبح لا متزايد ولا متناقص حكماً لا الشكل.





(٥) والافتراض الخطي $ق = ا م + ب$ فإن $ب$ تسمى مقطع الصادي هكذا

حيث $م = م + ب$ أي أن $ب = ج$ المقطع الصادي كما في الشكلين



فالمقطع الصادي للافتراض $ق = ا م + ب$ هو ٥

فالمقطع الصادي للافتراض $ج = ا م - ب$ هو ٥ أيضاً

هذا وسنناقش موضوع التزايد والتناقص بالتفصيل فيمكن آخر من هذا

المرفق وفي فصل 'التفاضل' إنشاء الله التقدير!!

× الافتراض التربيعي Quadratic Function

شامته $م = ق = ا م^2 + ب م + ج$ لكل $ا ، ب ، ج ، ا ≠ صفر$

ومن الدرجة الثانية لأن أكبر أس للمتغيره هو ٢

ومنحناه يُمكن برأيها بشكل قطع مكافئ Parabola (سأنتي بحثه بالتفصيل

في فصل المنحرج الضرورية إنشاء الله) ويكون منحناه مفتوح للأعلى هكذا: $ا > ٠$

عندما تكون إشارة $ا$ موجبة (مماثل من) ومفتوح للأسفل هكذا: $ا < ٠$ عندما تكون

إشارة $ا$ سالبة (مماثل من).

ونسمى أعلى نقطة بمنحناه أو أوطأ نقطة برأس القطع المكافئ متى



حيث $ا > ٠$ (من) رأس القطع المكافئ في الشكلين





مثال،

$$1^{\circ} \text{الاقتربان في (من) } = 2^{\circ} + 3^{\circ} - 4^{\circ}$$

اقتربان تربيعي من الدرجة الثانية، ولرسم منقطه نعين إحداثيات رأسه Vertex وملتقطه بالنقطه

$$\left(\frac{2^{\circ} + 3^{\circ}}{1 + 4} \right) \text{ يمكننا}$$

انصورة العامة لقاعدته في (من) $= 1^{\circ}$ من $2^{\circ} + 3^{\circ} = 4^{\circ}$

$$\text{وهو في (من) } 1^{\circ} = 2^{\circ} + 3^{\circ} - 4^{\circ}$$

$$\therefore 1^{\circ} = 1^{\circ} \text{ ، } 2^{\circ} = 2^{\circ} \text{ ، } 3^{\circ} = 3^{\circ}$$

$$1^{\circ} = \frac{2^{\circ} + 3^{\circ}}{1 + 4} = \frac{5^{\circ}}{5} = 1^{\circ}$$

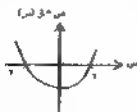
والآن نقوم ببناء الجدول التالي،

من	3-	2-	1- رأس	0	1
في (من)	صفر	2-	1-	2-	صفر

من الملاحظ أن في $(-3) = (1) = (1) = 2 + 3 - 4 = 2 - 1 = 1$ صفر للتفاضل المار حول

$$\text{في } (-2) = () = (-) + 2 - 3 = (-) + 2 - 3 = 2 - 3 = -1 \text{ الرأس}$$

$$\text{في } (-1) = (1) = (-) + 2 - 3 = (-) + 2 - 3 = 2 - 3 = -1$$



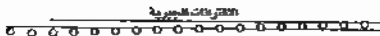
ومنه يمكن إيجاد المشتق

ملحوظة،

يمكن أن يكون منحني الاقتربان التربيعي القاطع للمكافئ - منحني

ليس من الممكن أن يكون المنحني اقتربان التربيعي بعد استبدال من بالتغير من





كذلك هي $3 = 1 + 2$ من $3 = 1 + 2$ ج ... وحسب الإشارة أيضاً

هنا كانت إشارة $+$ موجبة فهو مفتوح لليمين $($

وهنا كانت إشارة $-$ سالبة فهو مفتوح لليسار $)$

جـ، وميكانيكي بحث ذلك، بالتفصيل لاحقاً تكماً إن شاء الله تعالى في الدرس التالي

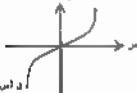
\times الاقتراح التكعبي (Cubic Function)

فالمعادلة هي $(س) = 1س^3 + 2س^2 + 3س + 4$ لكل $س$ ج $س \in \mathbb{R}$

$س \neq 0$

ومن الدرجة الثالثة لأن أكبر أس للمتغير من فيه $= 3$ وحسبناه يمثل بيانياً بواحد

من الشكلين أو $س = 1س^3$ ككلاً بياني لاحقاً - $س = 1س^3$



نمكن منحنى في $(س) = 1س^3$ هو

وهناك العديد من تقاربات كثيرات الحدود ذات الدرجات، المنوعة

كالتراجمه مثل في $(س) = 1س^3$ ، والخمسة مثل في $(س) = 1س^5$ والسادسة وغيرها ..

ونمكننا سنعكسها بما أوردناه منها فقط

هذا ويتساوى كثيرا الحدود، لذا يمكننا من نفس الدرجة وحسبنا بمعاملاتها

المطابقة متساوية كمثل ذلك مثل:

مثال،

لو نظرت إلى الاقتراحين في $(س) = (س + 2)^3$

$$س = 1س^3 + 6س^2 + 12س + 8$$

نظروا هذه المعادلة وسأنا انفسنا هذا السؤال ما العلاقة بين هاتين المعادلتين؟

سيكون الجواب: علينا أن نضع المعادلتين بصورة واحدة هكذا.





$$ق(س) = (س + ٧) (س + ٧) (س + ٢) = (س + ٤ + ٤ + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢)$$

$$= (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢)$$

$$= (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢)$$

$$= (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢)$$

$$نمكن هـ (س) = (س + ٦) (س + ٦) = (س + ٦) (س + ٦) = (س + ٦) (س + ٦)$$

$$٠، ق(س) هـ (س) = (س + ٦) (س + ٦) = (س + ٦) (س + ٦) = (س + ٦) (س + ٦)$$

وبعد ان مجال مكشورات الحدود دائماً الأعداد الحقيقية فإن تساوي مكشوري
 محدود في (س) ، هـ (س) يتم إذا كان لها نفس الدرجة وكانت معاملات قوى س
 المتناظرة فيها متساوية مثل ق(س) = (س + ٥) (س + ٢) ، هـ (س) = (س + ٥) (س + ٢) + ١ + س
 وبعد وضع شكلها على الصورة العامة.

مثال:

$$إذا كان ق(س) = (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢)$$

$$هـ (س) = (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢)$$

متساويين فيما فهم شكل من ٢ ، ٢

بما أن ق(س) = هـ (س)

فإن معاملات المتناظرة متساوية

$$أي أن ١ = ٥ - ٥ معاملات من المتناظران$$

$$وكتلك ٢ = ٢ - ٢ = ٢ = ٢$$

١، لا لاهران المتضعب Piecewise Function

هو الاقتران الجبري الذي تتغير قاعدته وفقاً لقيم المتغير من مجموعة
 جزيئية من مجالها، ولذا يكون له أكثر من قاعدة كما يلي:





مثال:

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 \text{ ، } \text{من } 2 \text{ ، } \text{من } 3 \text{ ، } \text{من } 4 \text{ ، } \text{من } 5 \text{ ، } \text{من } 6 \text{ ، } \text{من } 7 \text{ ، } \text{من } 8 \text{ ، } \text{من } 9 \text{ ، } \text{من } 10 \text{ ، } \text{من } 11 \text{ ، } \text{من } 12 \text{ ، } \text{من } 13 \text{ ، } \text{من } 14 \text{ ، } \text{من } 15 \text{ ، } \text{من } 16 \text{ ، } \text{من } 17 \text{ ، } \text{من } 18 \text{ ، } \text{من } 19 \text{ ، } \text{من } 20 \text{ ، } \text{من } 21 \text{ ، } \text{من } 22 \text{ ، } \text{من } 23 \text{ ، } \text{من } 24 \text{ ، } \text{من } 25 \text{ ، } \text{من } 26 \text{ ، } \text{من } 27 \text{ ، } \text{من } 28 \text{ ، } \text{من } 29 \text{ ، } \text{من } 30 \text{ ، } \text{من } 31 \text{ ، } \text{من } 32 \text{ ، } \text{من } 33 \text{ ، } \text{من } 34 \text{ ، } \text{من } 35 \text{ ، } \text{من } 36 \text{ ، } \text{من } 37 \text{ ، } \text{من } 38 \text{ ، } \text{من } 39 \text{ ، } \text{من } 40 \text{ ، } \text{من } 41 \text{ ، } \text{من } 42 \text{ ، } \text{من } 43 \text{ ، } \text{من } 44 \text{ ، } \text{من } 45 \text{ ، } \text{من } 46 \text{ ، } \text{من } 47 \text{ ، } \text{من } 48 \text{ ، } \text{من } 49 \text{ ، } \text{من } 50 \text{ ، } \text{من } 51 \text{ ، } \text{من } 52 \text{ ، } \text{من } 53 \text{ ، } \text{من } 54 \text{ ، } \text{من } 55 \text{ ، } \text{من } 56 \text{ ، } \text{من } 57 \text{ ، } \text{من } 58 \text{ ، } \text{من } 59 \text{ ، } \text{من } 60 \text{ ، } \text{من } 61 \text{ ، } \text{من } 62 \text{ ، } \text{من } 63 \text{ ، } \text{من } 64 \text{ ، } \text{من } 65 \text{ ، } \text{من } 66 \text{ ، } \text{من } 67 \text{ ، } \text{من } 68 \text{ ، } \text{من } 69 \text{ ، } \text{من } 70 \text{ ، } \text{من } 71 \text{ ، } \text{من } 72 \text{ ، } \text{من } 73 \text{ ، } \text{من } 74 \text{ ، } \text{من } 75 \text{ ، } \text{من } 76 \text{ ، } \text{من } 77 \text{ ، } \text{من } 78 \text{ ، } \text{من } 79 \text{ ، } \text{من } 80 \text{ ، } \text{من } 81 \text{ ، } \text{من } 82 \text{ ، } \text{من } 83 \text{ ، } \text{من } 84 \text{ ، } \text{من } 85 \text{ ، } \text{من } 86 \text{ ، } \text{من } 87 \text{ ، } \text{من } 88 \text{ ، } \text{من } 89 \text{ ، } \text{من } 90 \text{ ، } \text{من } 91 \text{ ، } \text{من } 92 \text{ ، } \text{من } 93 \text{ ، } \text{من } 94 \text{ ، } \text{من } 95 \text{ ، } \text{من } 96 \text{ ، } \text{من } 97 \text{ ، } \text{من } 98 \text{ ، } \text{من } 99 \text{ ، } \text{من } 100 \end{array} \right\} = \text{ق (من)}$$

هذا ويهمني العدد عنصر نقطة تعبير بالتمثيل.

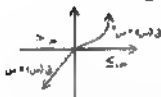
والملاحظ أن مجال الاقتران في القاعدة الأولى هو: $(0, 100)$.



ومجال الاقتران في القاعدة الثانية هو: $(-1, 100)$.

لذلك يظهر مجال في (من) هو $(-1, 100)$.

$$\text{ح} = (0, 100) =$$



ومداه مكتبا في الشكل:

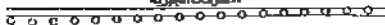
(11) اقتران القيمة المطلقة Absolute value Function:

أو كما يسميه بعض الرياضيين اقتران القيمة المئوية.

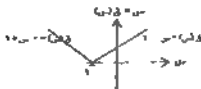
ومثاله في (من) $f(x) = |x + 1|$ ولتمثيل مستطاه مبدئياً يجب إعادة تعريفه ليصبح اقتران متشعب كما يلي:

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 \text{ ، } \text{من } 2 \text{ ، } \text{من } 3 \text{ ، } \text{من } 4 \text{ ، } \text{من } 5 \text{ ، } \text{من } 6 \text{ ، } \text{من } 7 \text{ ، } \text{من } 8 \text{ ، } \text{من } 9 \text{ ، } \text{من } 10 \text{ ، } \text{من } 11 \text{ ، } \text{من } 12 \text{ ، } \text{من } 13 \text{ ، } \text{من } 14 \text{ ، } \text{من } 15 \text{ ، } \text{من } 16 \text{ ، } \text{من } 17 \text{ ، } \text{من } 18 \text{ ، } \text{من } 19 \text{ ، } \text{من } 20 \text{ ، } \text{من } 21 \text{ ، } \text{من } 22 \text{ ، } \text{من } 23 \text{ ، } \text{من } 24 \text{ ، } \text{من } 25 \text{ ، } \text{من } 26 \text{ ، } \text{من } 27 \text{ ، } \text{من } 28 \text{ ، } \text{من } 29 \text{ ، } \text{من } 30 \text{ ، } \text{من } 31 \text{ ، } \text{من } 32 \text{ ، } \text{من } 33 \text{ ، } \text{من } 34 \text{ ، } \text{من } 35 \text{ ، } \text{من } 36 \text{ ، } \text{من } 37 \text{ ، } \text{من } 38 \text{ ، } \text{من } 39 \text{ ، } \text{من } 40 \text{ ، } \text{من } 41 \text{ ، } \text{من } 42 \text{ ، } \text{من } 43 \text{ ، } \text{من } 44 \text{ ، } \text{من } 45 \text{ ، } \text{من } 46 \text{ ، } \text{من } 47 \text{ ، } \text{من } 48 \text{ ، } \text{من } 49 \text{ ، } \text{من } 50 \text{ ، } \text{من } 51 \text{ ، } \text{من } 52 \text{ ، } \text{من } 53 \text{ ، } \text{من } 54 \text{ ، } \text{من } 55 \text{ ، } \text{من } 56 \text{ ، } \text{من } 57 \text{ ، } \text{من } 58 \text{ ، } \text{من } 59 \text{ ، } \text{من } 60 \text{ ، } \text{من } 61 \text{ ، } \text{من } 62 \text{ ، } \text{من } 63 \text{ ، } \text{من } 64 \text{ ، } \text{من } 65 \text{ ، } \text{من } 66 \text{ ، } \text{من } 67 \text{ ، } \text{من } 68 \text{ ، } \text{من } 69 \text{ ، } \text{من } 70 \text{ ، } \text{من } 71 \text{ ، } \text{من } 72 \text{ ، } \text{من } 73 \text{ ، } \text{من } 74 \text{ ، } \text{من } 75 \text{ ، } \text{من } 76 \text{ ، } \text{من } 77 \text{ ، } \text{من } 78 \text{ ، } \text{من } 79 \text{ ، } \text{من } 80 \text{ ، } \text{من } 81 \text{ ، } \text{من } 82 \text{ ، } \text{من } 83 \text{ ، } \text{من } 84 \text{ ، } \text{من } 85 \text{ ، } \text{من } 86 \text{ ، } \text{من } 87 \text{ ، } \text{من } 88 \text{ ، } \text{من } 89 \text{ ، } \text{من } 90 \text{ ، } \text{من } 91 \text{ ، } \text{من } 92 \text{ ، } \text{من } 93 \text{ ، } \text{من } 94 \text{ ، } \text{من } 95 \text{ ، } \text{من } 96 \text{ ، } \text{من } 97 \text{ ، } \text{من } 98 \text{ ، } \text{من } 99 \text{ ، } \text{من } 100 \end{array} \right\} = \text{ق (من)}$$





أو نجد صفرات: $1 \leq$ صفر \leftarrow من -1



(iv) القتران أكبر عدد صحيح (Greater Integer Function):

أو كما يسميه البعض القتران الدرجي أو السلمي Stop Pen/1104

لأعدله في (من) $1 \leq$ وتمثيل منحنى يجب إعادة ترميزه وبالشكل العام:

(ب) \leftarrow $n \geq$ من $1 \leq$ حيث n عدد صحيح

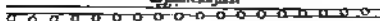
ومنها $n =$ عدد كل درجة من الدرجات التي تكون منحنى

وإرسم منحنى في (من) $=$ (من) المعروف على الفترة $[1, 2]$ مقولاً

$$\text{نجد طول الدرجة} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$



حيث الدائرة 0 في الرسم	$1 \leq$ من $2 \geq$	1	2
منها أنها لا تنتمي إلى	$1 \leq$ من $2 \geq$	1	1
القتران مثلاً ق (1, 2)	$1 \leq$ من $2 \geq$	1	0
ولا يسوي 1 احتلاقاً	$1 \leq$ من $2 \geq$	1	1
"من الرسم"	$1 \leq$ من $2 \geq$	1	2



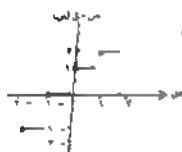
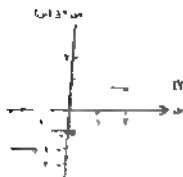
وعندما نكتب إشارة من سالبة

فإنه يعني يصبح معكوساً

لرسم ديمر في (س) = 1 سراً على (2 + 2) 1

هكذا

بعد إعادة تعريفه



$$\left. \begin{array}{l} 2 - = س \cdot 2 - \\ 1 - = 2 - > س \geq 1 - \\ 0 - = 1 - > س \geq 0 - \\ 1 - = 0 - > س \geq 1 - \\ 2 - = 1 - > س \geq 2 - \end{array} \right\} \text{ في (س) = 1}$$

(٧) الاقتارات النسبي Rational Function:

هو الاقتارات الكمراف على شكل كسر يشمل بسطاً ومقاماً.

مثال:

$$\text{في (س) = } \frac{1 - س}{1 + س} \text{ ومجانه ح}$$

ومجال الاقتارات النسبي هو ح -- {أسفل الاقتارات ، أسفل مقامه}

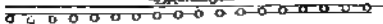
مثلاً

$$\text{مجال الاقتارات في (س) = } \frac{1}{س} \text{ هو ح - } \{0\}$$

$$\text{ويكتب هكذا في (س) = } \frac{1}{س} \text{ ، س } \neq \text{ صفر}$$



الاقتراض الجبرية



ومجال في (س) = $\frac{1}{1-s}$ ، بعد أن نجد أمثاله الاقتراض، الصغر ممانه

$$s = 1 = \text{صفر}$$

$$s = 1 = \text{صفر الاقتراض}$$

، مجال في (س) = $\frac{1}{1-s}$ ، س = 1 ، وهكذا

(٧١) × الاقتراض الجندور والتحديد:

- الاقتراض الجندور التريهي Square Root Function

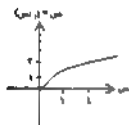
مثال:

في (س) = \sqrt{s} ، دليله ٢ ، ومجاله $s \leq \text{صفر}$

أي مجاله الأعداد المحببة الموجبة والصفر أيضاً.

حيث الأعداد الصالبة ليس لها جذر تريهي حقيقي بل يجب سلبها بحدود
الآن - ومده الصفر والأعداد الموجبة فقط

مثال:



ارسم معننى الاقتراض في (س) = \sqrt{s}

١	٢	٣
١	٢	٣
١	٢	٣

في (٠) = $\sqrt{0} = \text{صفر}$

في (١) = $\sqrt{1} = 1$

في (٤) = $\sqrt{4} = 2$

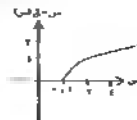
ومجال لاقتراض في (س) = \sqrt{s} - ١ هو $s \leq \text{صفر}$

أي $s \leq 1$





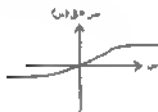
ومنه



٨. الاقتران الجذر التكعيبي Cubic Root Function

مثال

في (س) $y = \sqrt[3]{x}$ وله ٣ مجال ح حيث العدد الصائب = الموجب والصفر سلاهما
بما جذر تكعيبي



ومنه

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}$$

وأخيراً لا تنسى أن $\sqrt[3]{x} = |x|^{\frac{1}{3}}$ لذا تنفي التقوية

ويشكل عام مجال الاقتران في (س) $y = \sqrt[3]{x}$ هو

١. س < ٠ صفر صمما ن (زوجي مثل $\sqrt[3]{-8} = -2$ و $\sqrt[3]{-1} = -1$)

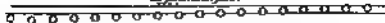
٢. س > ٠ صمما ن شرطي مثل $\sqrt[3]{8} = 2$ و $\sqrt[3]{1} = 1$

٣. (٨-١) إشارة الاقتران الجبري Sign of Algebraic

مطراً لأهمية إشارة الاقتران عند تعيين مجاله وتمثيله البياني بشكل عام
فإننا نبحث إشارة الاقترانات من حيث هي موجبة أو سالبة أو صفرية كما يلي

إشارة الاقتران الخطي في (س) $y = ax + b$: نجد صفره

الاختلافات المبرورة



وصفوه يسمى العدد الجبرج وهو العدد الذي عنده يعبر الاختلاف من اشارته

ا س + ب = صفر ← ا س = ب ← س - ب صفر أو عنده الجبرج



نعمي اشارته أ عندهما من < $\frac{ب}{ا}$ أو تمويص بعدد اكبر من صفر أو العدد الجبرج الاختلاف

مكسب اشارته أ عندهما من > $\frac{ب}{ا}$ أو تمويص بعدد أصغر من صفر العدد الجبرج الاختلاف

مثال:

أوجد اشارته في (س) = 2 من 1



أو تمويص العدد 1 أكبر من صفر الاختلاف

في (5) 2 = (5) - 1 = 4 موجب كلما في الشكل

وكذلك تمويص 1 أصغر من صفر الاختلاف

في (0) 2 = (0) - 1 = -1 سالب كلما في الشكل

مثال:

أوجد اشارته في (س) = 4 - 2 من

3 من = صفر ← 3 = 4 - 2



أو التمويص بالمعدية:

في (5) 4 = 4 - (5) 2 = 15 - 6 سالب

في (0) 4 = 4 - (0) 2 = 9 موجب



الاشارة الجبرية



~ اشارة الاضربان التجميعي في (س) 1 من 2 + به س + ج

وكتعد اشارة على قيعة مميزة ب 2 1 ج

فاذا كان ب 2 - 1 ج < صفرة صفرة



واشارة صفرة صفرة صفرة

مثال:

ما اشارة في (س) = س 2 - 5 من 6 +

$$1 = 1$$

$$2 = -$$

$$3 = -$$

ب 2 - 1 ج = (5 -) 2 - 1 = 1 = 1 هو ج

من 2 - 5 من 6 + صفرة

(س - 2) (س - 5) = صفرة

س = 2 س = 2



واذا كان ب 2 - 1 ج = صفرة صفرة صفرة واحد صفرة واحد اشارة

لنفس اشارة ا لا عند حيرة فلا قيمة له

مثال:

ما اشارة في (س) = س 2 - 5 من 6 +

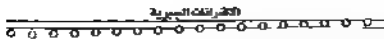
$$1 = 1$$

$$2 = -$$

$$3 = -$$

ب 2 - 1 ج = (5 -) 2 - 1 = 1 = 1 هو ج





فيشارته ضمن إشارة أ وهي موجبة $\leftarrow \dots \rightarrow$

ولذا كان ب^٢ أ ج > منفر فلشارته ضمن إشارة أ تكونه لا أ مسار حقيقه له

مثال

ما إشارة ق (س) = س^٢ + س^٢ + ٥ = ١

ب = ٢



ج = ٥

ب^١ - ٤ = ٤ ج = ٢٧ = ١٥ + ٥ = ٥ = ١٦ > منفر فلانما موجب

أما بقية كميات الحدود فلنأ تقسمها بالضرب الى الافتراضات خطية
والربعية بواسطة التحليل ثم نضرب الاشارات كما يلي

ما إشارة في (س) = س^٢ - ١

س^٢ - ١ = (س - ١) (س + ١) (س^٢ + ١)

س - ١ = ١ منفر الإشارة^١ $\leftarrow \dots \rightarrow$
س = ١



بها الضرب إشارة ج^١ $\leftarrow \dots \rightarrow$

~ إشارة الافتراضات النسبي نجد إشارة البسط وإشارة المقام ونجري عملية قسمة
الاشارات كضربها بالمتكاف

مثال:

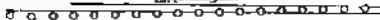
ما إشارة في (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ٥}$ = س^٢ - ١

إشارة البسط $\leftarrow \dots \rightarrow$

إشارة المقام $\leftarrow \dots \rightarrow$

إشارة في (ر) $\leftarrow \dots \rightarrow$





وهكذا فإننا نمتد على إشارة الافتراضات الحلقية والذريعية في إيجاد
إشارة الافتراضات التسمية وكثيرات الحدود الأخرى بواسطة التعليل إلى التوافق.

x قيمة الافتراض الجبري Value Of Function:

سأناقش فيما يلي كيفية إيجاد قيمة الافتراض عند أي نقطة في مجاله،
وبطريقة التعميم المباشر دون تبسيط أو اختصار على الإطلاق، هذا إذا علمت قيمة
اختبار فيه وعلم مجاله أيضاً.

ومجال كثيرات الحدود دائماً الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها إلا
إذا عُرفت على فترات أو مجموعات متعاقبة وتتكون معرفة عندما من x ح

مثال،

$$\text{إذا كان } f(x) = x^2 - 5x + 6$$

أوجد $f(-1)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ أي قيمة الافتراض عندما من $x = -1$ ، $x = 1$ ، $x = 2$

$$f(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$$

$$f(1) = (1)^2 - 5(1) + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$$

$$f(2) = (2)^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

وعند إيجاد القيمة العددية للافتراض عند أي نقطة يجب أن نلتزم بهذه
الطريقة في مجاله، لذا يجب معرفة المجال أولاً ثم القيمة كما في الأمثلة الثانية

-- كثيرات الحدود معرفة لكل من x أي أن مجالها x دائماً إلا إذا عرفت
بطريقة أخرى بعض النقاط من مجالها.

-- الافتراضات التسمية معرفة شروط أن المقام $\neq 0$ صفر لذا فالاقتراض قيمة عددية
دائماً إلا عند أصفار مقامه كما يلي.

$$\text{أر حكر } f(x) = \frac{x^2}{x-1} \text{ فإن مجاله } x \neq 1$$



لافتراضات التي تحتوي جبراً دافله زوجي كالجذر التربيعي مثلاً ما يد حل
الجذر يجب أن يكون موجياً أو صفراً ولا يساوي لكمية سالبة

معادلة داخل الجذر < صفر

مثال:

إذا كان في (س) $\sqrt{x} = 2$ من $x \geq 0$

المجال، من $x \geq 0$ صفر $\leftarrow x \geq 0$

أي أن مجاله من $x \geq 0$ أو بشكل فترة (0، ∞)

إذا لا جذر حقيقي دافله زوجي لكمية سالبة.

والتمثيل $\sqrt{x} = 1$ ، $\sqrt{x} = 1$ ليس عدد حقيقي بل مركب معكاً معاً.

أما الافتراض الذي يحتوي جبراً دافله زوجي فمجاله دائماً ح الأعداد
الحتفية مثل الجذر التكعيبي، إذ يوجد جذر حقيقي لجميع الأعداد الفردية.

مثال:

إذا، كان في (س) $\sqrt[3]{x} = 2$ فمجاله ح يكون من $x \geq 0$ ح

(1-4) جبر الافتراضات:

أو كيفية إجراء العمليات الخمس التالية:

الجمع (مجموع) The Sum

الفرق (الفرق) The Difference

الضرب The Product

القسمة The Quotient

تركيب The Combining

على الافتراضات الحبية



مثال

إذا كان $ق(مر) = مر^2$ ، $ه(مر) = مر$ ، $س(مر) = 1$ ، $س(مر) \neq 1$

فإن $ق(مر) - ه(مر) = ق(مر) - ه(مر) = مر^2 - مر = مر(مر - 1)$ ، $س(مر) = 1$ ، $س(مر) \neq 1$

$$س(مر) = \frac{1}{1} = 1$$

وبذلك $ق(مر) - ه(مر) = ق(مر) - ه(مر) = مر^2 - مر = مر(مر - 1)$ ، $س(مر) = 1$ ، $س(مر) \neq 1$

$$س(مر) = \frac{1}{1} = 1$$

وبما كان $ق(مر) - ه(مر) \neq ق(مر)$

فالطرح غير تبيلي

ولنتحقق:

$$ق(مر) - ه(مر) = مر^2 - مر = مر(مر - 1)$$

$$ق(مر) - ه(مر) = مر^2 - مر = مر(مر - 1)$$

" يُعرف حاصل ضرب الاقترانين $ق(مر)$ ، $ه(مر)$ بأنه $ق(مر) - ه(مر)$ ، $ق(مر)$

الذي تكون فيه صورة كل عنصر $مر$ في مجاله مضروباً بحاصل ضرب

صورتيه $ق(مر)$ في الاقترانين المذكورين.

فإن إذا كان $ق(مر) = مر^2$ ، $ه(مر) = مر$ ، $س(مر) = 1$ ، $س(مر) \neq 1$

$ق(مر) - ه(مر) = ق(مر) - ه(مر) = مر^2 - مر = مر(مر - 1)$ ، $س(مر) = 1$ ، $س(مر) \neq 1$

وبذلك $ق(مر) - ه(مر) = ق(مر) - ه(مر) = مر^2 - مر = مر(مر - 1)$ ، $س(مر) = 1$ ، $س(مر) \neq 1$

وبما كان $ق(مر) - ه(مر) \neq ق(مر)$

فالضرب تبيلي





$$\text{ولنتحقق لى هـ (1) } (1) = \left(\frac{1}{1-1} \right) (1) = (1) \text{ هـ (2) } (1) = \left(\frac{1}{1-1} \right) (1) = (1)$$

$$\text{و هـ (3) } (1) = \left(\frac{1}{1-1} \right) (1) = (1) \text{ هـ (4) } (1) = \left(\frac{1}{1-1} \right) (1) = (1)$$

* يُعرف حلز قسمة الاقرانين ق (س) = هـ (س) كل منهما على الآخر كما يلي

$$\frac{ق(س)}{هـ(س)} = \left(\frac{ق}{هـ} \right) (س) \text{ هـ (س) } \neq \text{صفر}$$

$$\text{ومجال هـ (س) } \neq \text{مجال ق (س) } \neq \text{مجال هـ (س) } \neq \text{مجال ق (س) } \neq \text{مجال هـ (س) } \neq \text{مجال ق (س)}$$

$$\text{او } \frac{هـ(س)}{ق(س)} = \left(\frac{هـ}{ق} \right) (س) \text{ هـ (س) } \neq \text{صفر}$$

$$\text{ومجال هـ (س) } \neq \text{مجال ق (س) } \neq \text{مجال هـ (س) } \neq \text{مجال ق (س) } \neq \text{مجال هـ (س) } \neq \text{مجال ق (س)}$$

$$\text{اذ، ممكن في (س) } = \text{س}^2 \text{ هـ (س) } = \frac{1}{\text{س}} \text{ هـ (س) } \neq \text{صفر}$$

$$\text{فان } \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \left(\frac{ق}{هـ} \right) (س) = \frac{1}{\text{س}} \text{ هـ (س) } = \left(\frac{1}{\text{س}} \right) (س) = \left(\frac{1}{\text{س}} \right) (س)$$

$$\text{هـ (س) } = \text{س}^2 \text{ هـ (س) } \neq \text{صفر} \text{ ومجال هـ (س) } = \{1\}$$

$$\text{وكذلك } \frac{هـ(س)}{ق(س)} = \left(\frac{هـ}{ق} \right) (س) = \frac{1}{\text{س}} \text{ هـ (س) } = \frac{1}{\text{س}} \text{ هـ (س)}$$

$$= \left(\frac{1}{\text{س}} \right) (س) = \left(\frac{1}{\text{س}} \right) (س) = \left(\frac{1}{\text{س}} \right) (س)$$

$$\text{مجال هـ (س) } = \text{س}^2 \text{ هـ (س) } \neq \text{صفر}$$

$$\text{هـ (س) } = \text{س}^2 \text{ هـ (س) } \neq \text{صفر}$$

$$\text{هـ (س) } = \text{س}^2 \text{ هـ (س) } \neq \text{صفر}$$

$$\text{هـ (س) } = \{1, 0\}$$

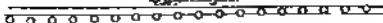
$$\text{ومجال هـ (س) } = \{1, 0\}$$

وبهذا السبب متوضح بالتفصيل عملية تركيب الانقرانات كما يلي

من المعلوم ان الانقران هو ارتباط بين عناصر مجموعتين بحيث يرتبط كل

عنصر في مجال هـ (س) واحد وواحد فقط في مجال ق (س)





هنا مخطط سهمي للاقتران Q (س)



وهنا مخطط سهمي للاقتران H (س)



من المخططين الممثلين السابقين يمكن تكوين اقتران جديد على النحو

١ $\xrightarrow{\text{ق (س)}} 5 \xleftarrow{\text{ق (س)}} 9$ ويرمز لهذه العملية بالرمز $9 = (1)5$

٢ $\xrightarrow{\text{ق (س)}} 6 \xleftarrow{\text{ق (س)}} 9$ ويرمز لهذه العملية بالرمز $9 = (2)6$

٣ $\xrightarrow{\text{ق (س)}} 6 \xleftarrow{\text{ق (س)}} 10$ ويرمز لهذه العملية بالرمز $10 = (3)6$

٤ $\xrightarrow{\text{ق (س)}} 7 \xleftarrow{\text{ق (س)}} 11$ ويرمز لهذه العملية بالرمز $11 = (4)7$

وبهذه العملية قد حققنا اقتران جديد يسمى الاقتران المركب من Q (س) ، H (س)

ويرمز له بالرمز $H \circ Q$ (س)



ونقرأ الاقتران المركب هكذا:

$H \circ Q$ (س) = H (ق (س)) = H (٥ ق) (س)

والآن مفهوم عملية تركيب الاقترانات ميكانيكياً كما يلي

إذا كان Q (س) = س ، H (س) = $\frac{1}{س}$ ، س $\neq 1$

فإن Q (٥ هـ) (س) ونقرأ (ق بعد هـ) (س)



(٨ - ٧) الاقتران العكسي Inverse Function

من المعلوم أن f (من) = $\{(5, 1), (7, 2), (8, 3), (6, 4)\}$ اقتران
 طعمم نكرار المستط الأول -

مجاله المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4\}$ المستط الأول

ومناه المجموعة $B = \{5, 6, 7, 8\}$ المستط الثانية

و لأن f استبدلتنا مناه بمجاله والعكس، فكل النتائج اقتران أيضاً

لنرى هل،

هـ (من) = $\{(5, 1), (7, 2), (8, 3), (6, 4)\}$ الاقتران

بحرابة: نعم تكون المستط في جميع الأزواج للدرجة لم يكرر.

من المعلوم أيضاً أن f (من) = $\{(5, 1), (7, 2), (8, 3), (6, 4)\}$ الاقتران
 - نعم نكرار المستط الأول -

مجاله المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4\}$

ومناه المجموعة $B = \{5, 6, 7, 8\}$

وإذا استبدلتنا مناه بمجاله والعكس، فكل النتائج اقتران أيضاً

لنرى هل،

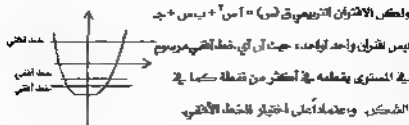
هـ (من) = $\{(5, 1), (7, 2), (8, 3), (6, 4)\}$ الاقتران

بحرابة لا تكون المستط الأول f تكرر في زوجين مرتبين هما $(4, 6)$ ، $(3, 7)$

بذلك فالاستبدال حل الذي مجاله والعكس مدى - ينتج أحياناً اقتران مثل

f (من) وأحياناً أخرى لا مثل هـ (من).

لنركز على نوع الاقتران f (من) والذي عكسه f (من) استبدال المستط الاقتران



ويمكن القول أن الاقترانات الضمنية والتضمينية لاقترانات واحد لوحد ولها اقترانات عكسية وأن الاقترانات التزويقية ليست اقترانات واحد لوحد وليس لها اقترانات عكسية.

والآن العملية الممكنة لكي لإيجاد الاقتران العكسي في (س).

وحدد إيجاد في (س) لأي اقتران واحد لوحد فإنا سنترشد بالقاعدة التالية.

$$\text{لق } (س، ق) \text{ (س) = (ق) } \oplus \text{ (ق) (س) = س}$$

تكون متوزعة المتضمنين لوكيب الاقتران وممكنه مساوية للصفر نفسه.

مثال

$$\text{ولتأكد من ذلك افترض أن في (س) = } \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

فإن في (س) = $\{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ بعد استبدال العناصر الأولى بالثانية

$$\text{ومنها في (2) = 3 ، في (3) = 2}$$

$$\text{لأي في } (ق) \oplus \text{ (ق) = نفس العدد}$$

$$\text{وكذلك (ق) } \oplus \text{ (ق) = نفس العدد}$$

$$\text{أي أن (ق) } \oplus \text{ (ق) = (س) = (ق) } \oplus \text{ (ق) = س}$$

مثال:

بد مكان في (س) = $أس + ب$ أوجد الاقتران العكسي لنا مكان له اقتران عكسي





بمفكر إيجاد ق' (س) بطريقتين:

الأولى: تطبيق القاعدة (ق ٥ ق') (س) = ق (ق' (س)) = س

الأولى: (هـ ٥ هـ') (س) = هـ (هـ' (س)) = س من القاعدة

أي أن: (هـ' (س))^٢ = ٢

ومنها وبأخذ الجذر التكعيبي للطرفين:

$$\sqrt[3]{(هـ' (س))} = \sqrt[3]{٢}$$

٢: هـ' (س) = $\sqrt[3]{٢}$ من الاقتراض المتكسبي للافتراض هـ (س)

الثانية: ققريش س = هـ (س)

$$\therefore س = س'$$

٣: $\sqrt[3]{س} = \sqrt[3]{س'}$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$\therefore \sqrt[3]{س} = س'$$

٤: س = $\sqrt[3]{س}$ ثم تبدل المتغيرات س بدل س والعكس صواب

٥: هـ' (س) = $\sqrt[3]{س}$ الاقتراض المتكسبي للافتراض هـ (س)

والجواب بالطريقتين واحد وصواب

(٨ - ٨) خمسة كثيرات الحدود:

نعود ثانية إلى كيفية إجراء عملية التسمية وبطريقتين في الافتراضات وعلى

وجه المحصور من كثيرات الحدود، لتستطيع حلقة نظريتي النهايات والمواضع

وكيفية تحليل الافتراضات إلى عواملها الأولية في فصول أخرى من هـ المؤلف

وللتوصل إلى كيفية حل المعادلات في الافتراضات وتوابعها في حفل الأعداد

الحقيقية.

عملية القسمة في الانقرارات الجبرية وكثيرات الحدود بوجه خاص تتم بطريقتين هما:

الطريقة الاولى: القسمة الطويلة (Long Division) أو خوارزمية تكرار خطوات العملية - القسمة يكونها كنسب الى مقام للمربي الجوارمي ، ٧٨ (٨٥٠)م والتي مصادها بالاجاز شديد

إذا كان في (م) ، هـ (م) انقراتين كثيرتي الحدود حيث هـ (م) في صفر

فإن في (م) هـ (م) = () - () واللفان يتنجان

انقراتين كثير الحدود هما لك (م) = ر (م) بحيث أن

في (م) هـ (م) ، لك (م) + ر (م) حيث \geq درجة (م) \geq هـ (م)

وتتم عملية القسمة الطويلة بوضع الانقراتين (كثيرات الحدود) على شكل

قسمة طويلة = كلما في الأعداد المحتبهة - كلما في الشكل

عندها نطلق على الانقرات

المسميات التالية:

$$\begin{array}{r} \text{هـ (م)} \\ \text{ق (م)} \overline{) \text{ق (م)}} \\ \underline{\text{ر (م)}} \end{array}$$

ق (م) يسمى المقسوم

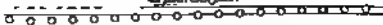
هـ (م) يسمى المقسوم عليه

لك (م) يسمى خارج القسمة (الجولي)

ر (م) يسمى الباقي

ويجب ملاحظة أن: درجة هـ (م) للمقسم عليه + درجة لك (م) خارج القسمة

= درجة ق (م) المقسوم



حيث $(2) = (1) - (3)$

وهذه العملية تسمى حولزمية القسمة في الانقرضات الجبرية.

ودرجة r (س) الباقي هي صفر سكونه افتراض ثابت داخل من درجة المقسوم عليه \rightarrow (س)

مثال:

$$\begin{array}{r}
 2 - 3 \text{ س} \\
 \overline{2 + 3 \text{ س}} \\
 \underline{2 - 3 \text{ س}} \\
 6 + 9 \text{ س} \\
 \underline{6 + 9 \text{ س}} \\
 0
 \end{array}$$

اقسم $2 - 3 \text{ س}$ من $2 + 3 \text{ س}$ بالقسمة الطويلة

الحاصل مكتوب هو على اليسار ومعه:

الحاصل القسمة $2 - 3 \text{ س}$

الباقى $0 = 2 + 3 \text{ س}$

وهكذا...

الطريقة الثانية: القسمة الطويلة Systematic Division وهذه الطريقة في القسمة

تعتبر حالة خاصة لا تتم إلا إذا كان المقسوم عليه كثير حدود

خطي أي من الدرجة الأولى فقط

نعم إنها عملية قسمة مستمرة لكثير حدود درجته أكثر من 1 على كثير

حدود من الدرجة الأولى

ويكون المقسوم عليه وعلى المنورة المقلبة $(\text{س}) - 1$ كما في الخطوات

التالية

مثال:

اقسم $2 + 3 \text{ س} - 10 \text{ س}^2$ من 16 على $(\text{س}) - 1$

نجد صغر المقسوم عليه هكذا $1 - \text{س} = \text{صغر}$ $\leftarrow \text{س} = 1$ حيث أن يسمى صغر 1

ومنها $\text{س} - 2 = \text{صغر}$ $\leftarrow \text{س} = 2$ صغر المقسوم عليه



ثم نكتب معاملات حدود المقسوم مرتبة حسب قوى x المتزايدة دون إغفال الحدود معدومة كما يلي.

مع القسوم عليه	x^2 من	x من	من الثالث
(3)	3	15	-19
	2	17	36
	2	17	20

والخطوات تتم كما يلي

انزل معامل الحد الأول كما هو لأنه للمعامل الأول

ثم اضرب $3 \times 3 = 9$ وضعه تحت للمعامل الثاني

ثم اجمع $9 + 3 = 12$

ثم اضرب $12 \times 3 = 36$ وضعه تحت للمعامل الثالث

ثم اجمع $-19 + 36 = 17$

ثم اضرب $17 \times 3 = 51$ وضعه تحت للمعامل الرابع

ثم اجمع $-20 + 51 = 31$ فيكون هو الباقي

وبالإيجاز الشديد تتم عملية القسمة التركيبية ، بإنزال معامل الحد الأول دائماً ثم الضرب والجمع حتى تتوصل الى الباقي كما هو واضح أعلاه.

وحيث أن مخرج خارج القسمة أقل بدرجة واحدة عن درجة المقسوم فإنه افترض نريه بهذا الشكل

جاءت النسبة $Q(x) = 2x^2 + 9x + 18$ والباقي $R(x) = 20$ درجة أقل من درجة المقسوم عليه

وهو يطابق حواريومية القسمة ، حيث:

$$Q(x) = D(x) \cdot K(x) + R(x)$$



أي أن

$$2 \text{ من } 2 + 2 \text{ من } 15 = 36 = (3 \text{ من } 2 + 2 \text{ من } 9 + 2 \text{ من } 18) + 2$$

(لتحقق من ذلك، يضرب)

مثال

القسم (من 1 - 35 من 2 + 2 من 8) على (2 + 2) بالقسمة الطويلة

بعد، صغر المقسوم عليه: $2 + 2 = 4$ صغر \leftarrow من $= - 2$

ثم نرتب هكذا في المثال السابق. وبما أن المقسوم عليه لا يحتوي على من 2

لأن معاد من 2 = صغري - من 2 وجوب التقوية

صغر المقسوم عليه	من 2	من 2	من 2	من 2	من 2 ثابت
(2 =)	1	0	15	2	2
	↓	1	16	2	2
	↓	1	1	2	2

وبالمثل، مماثل لما سبق، فإن:

خارج القسمة (من) = من 2 - 2 من 2 + من 2 = 2 تكون درجة خارج القسمة أقل بوحدة من درجة المقسوم.

الباقى (من) = صغر

مثال:

القسم (6 من 2 - 2 من 18 - 18) على (2 من 2 + 2) = 2

بعد، صغر المقسوم عليه:

$$2 \text{ من } 2 + 2 \text{ من } 18 = 2 \text{ من } 18 \leftarrow 2 \text{ من } 18 = 2 \text{ من } 18 \leftarrow 2 \text{ من } 18 = 2 \text{ من } 18$$



مثال

ما قيمة m التي تجعل باقي قسمة $(m+2)(m+5)$ على $m+1$ يساوي 1

حل: $m+1 = (m+2) + 1$ هو القاسم

الحل: صغر المقسوم عليه $m+2$ صغر $m+1$ يساوي 1

الباقى: $(m+2)(m+5) = (m+1)(m+6) + 1$

$$1 = (m+1)(m+6) + 1$$

ومنها $m+6 = 0$

$$m = -6$$

نظرية العوامل The Factor Theorem

نبدأ بالمعنى العام للنظرية:

يكون الاثنان الخطي $(m+1)$ عامل من عوامل الاثنان $(m+1)$ اذا وفقط اذا كان $(m+1)$ صفر الاثنان الخطي = صفر

والعكس

يكون $(m+1) = 0$ عامل من عوامل كثير الحدود $(m+1)$ اذا وفقط اذا كان $(m+1) = 0$ صفر والعكس أيضاً صحيح

كما ويكون $(m+1) = 0$ عامل من عوامل كثير الحدود $(m+1)$ اذا وفقط اذا كان $(m+1) = 0$ صفر والعكس أيضاً صحيح

والأمثلة التالية توضح ما لو كانت من حقائق عن نظرية العوامل.

مثال

ما هي m التي تجعل $m+1$ عامل من عوامل $(m+1)$ يساوي 1





الجواب يكون Δ (ن) عامل من عوامل Q (ن) إذا كان $Q = \{Y\}$ صفر

لنجد في $\{Y\} = \{Y\} - \{Y\} = 2 + 2 - 8 = 2$ $2 + 12 - 8 = 2$ $2 = 2$ $2 \neq$ صفر

∴ 2 ليس عامل من عوامل $Q = 2 - 2$ من 2 من 2

مثال

هي من $2 - 2$ عامل من عوامل Q (ن) $= 2 - 2$ من 2 من 2 من 2

يكون $2 = 2$ عامل من عوامل Q (ن) إذا كان $Q = \{Y\}$ صفر

لنجد في $\{Y\} = \{Y\} - \{Y\} = 2 + 2 - 8 = 2$ $2 = 2$ صفر

∴ $2 = 2$ عامل من عوامل Q (ن)

ويمكن أن يقال إن تحليل $Polynomial$ كثيرات الحدود إلى عواملها الأولية من أشهر التطبيقات على نظرية العوامل.

والتمهيد هذه المسطور:

العامل الأولي للاقتراء كثير الحدود هو الاقتراء الذي لا يمكن تحينه إلى اقتراءات أخرى أقل منه درجة، وينتج عليه إلى اخراج العامل المشترك الأكبر كمحدد خطي (اقتراء ثابت) لا ينحصر تحليلاً إلى العوامل الأولية، فسي الاقتراء

في (ن) $= 2$ من 2 $8 + 2$ فإن 2 (ن) ليس تحليلاً إلى العوامل على الإطلاق.

كون في (ن) $= 2$ من 2 $8 + 2$ اقتراء خطي من الدرجة الأولى

وهو 2 من 2 $8 + 2$ اقتراء خطي من الدرجة الأولى

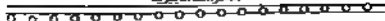
هالاقتراء Δ (ن) $= 2$ من 2 ليس أقل من Q (ن) $= 2$ من 2 $8 + 2$ درجة على الإطلاق.

ن، يقال أن الاقتراء الخطي هو لعترا أولي لا يحل إلى اقتراءات أولية

والاقتراء التريبي والذي على الصورة العامة في (ن) $= 2$ من 2 $8 + 2$ 2 من 2 $8 + 2$

يكون أولية وغير قابل للتحليل إلى العوامل عندما يكون مضروباً 2 $8 + 2$ 2 من 2 $8 + 2$





ملحوظة:

لكثير الحدود Q (س) $= A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$ من 1 إلى n ،
 ذي معاملات المصححة. بعض الأحيان أصفار نسبية ناتجة عن خلع خمسة عوامل
 الحد الأخير (المطلق) A_n على عوامل معامل الحد الأول (الوحداني) A_0 وذلك عندما
 يتكون A_0 من 1 أي عدد صحيح ما عدا الواحد الصحيح كما في المثال

مثال

للافتراض الجبري في (س) $= x^2 - 5x + 6$ من 2 أصفار نسبية ناتجة من
 قسمة عوامل العدد 6 على عوامل العدد 1 حيث:

عوامل الحد 6 هي $1 \pm, 2 \pm, 3 \pm, 6 \pm$

عوامل معامل الحد 1 هي $1 \pm, 2 \pm$

∴ جميع أصفار في (س) موجبة كما في المجموعة $\{1 \pm, 2 \pm, 3 \pm, 6 \pm\}$

وأما الأصفار النسبية تنتمي إلى المجموعة $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\}$

والبيان

$$Q(x) = (x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})(x - 2)(x - 3)$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} - 2x + 3 - 3x + 6 = x^2 - 5x + 6$$

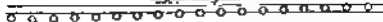
هو الصفر النسبي للافتراض في (س)

وبالمثل معامل يعكس أن نجد أصفار نسبية أخرى للافتراض في (س) أن وجدت من

ضمن مجموعة $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\}$

وهذا يساعد في تحليل كثيرات الحدود التي معاملات حدودها الأولى ليس واحد

مصحح كما في المثال.



$$(س' + ٢\sqrt{١} + ١) (س' + ٢\sqrt{١} + ١) = ١ + ٢س' + ١ \quad \text{اقتراء}$$

الصرف لأيمن.

$$= س' (س' + ٢\sqrt{١} + ١) + ٢\sqrt{١} (س' + ٢\sqrt{١} + ١) + ١ (س' + ٢\sqrt{١} + ١) + ١$$

$$= س' + ٢\sqrt{١} + ١ + س' + ٢\sqrt{١} + ١ + ٢س' + ٢\sqrt{١} + ١ + ١ + ٢س' + ٢\sqrt{١} + ١ + ١$$

$$= س' + ١ = \text{انطرف الأيسر} \quad \text{فطريقة الحل متوابة}$$

مثال:

حلل $س' + ١$ إلى عوامله الأولية:

نحول الاقتراء $س' + ١$ إلى صورة فرق بين مربعين وذلك:

$$س' + ١ = ٢ + (س')^2 \quad \text{باضافة ضعف الحد الأول = الحد الثاني}$$

$$= ٢ + ٢س' + ١ = (س' + ١)^2 \quad \text{ثم طرحه يمكننا}$$

$$س' + ١ = (س' + ١)^2 - (س' + ١)^2 = (س' + ١)^2 - (س' + ١)^2$$

$$= (س' + ١)^2 - (س' + ١)^2 = (س' + ١)^2 - (س' + ١)^2$$

$$= (س' + ١)^2 - (س' + ١)^2 = (س' + ١)^2 - (س' + ١)^2 \quad \text{أصبح بصورة فرق بين مربعين}$$

$$= (س' + ١)^2 - (س' + ١)^2 = (س' + ١)^2 - (س' + ١)^2 \quad \text{وجد شروط حلها}$$

$$= (س' + ١)^2 - (س' + ١)^2 = (س' + ١)^2 - (س' + ١)^2$$

تحقق من صحة الحل باستخدام قانون التوزيع هكذا مرّ بالمثال أعلاه

(٨- ١٠) حل أنظمة من المعادلات الجبرية بمتغير واحد:

Solving Algebraic Equations with one Variable

نعود إلى المعادلات وحل أنظمة بمتغير واحد بالثلاث لكن بحكافة كالدراجات

الأول والثانية والثالثة... وعلى جميع أنواع الاقتراءات.



التفسير كما هو أدناه:

(3) حل أنظمة من المعادلات، تحتوي على انقرافات للقيمة المطلقة.

في البداية هناك خاصية للقيمة المطلقة تستخدم في حل المعادلات التي تحتوي الانقرافات للقيمة المطلقة وهي:

$$|a| \text{ مكان } |b| = |c| \Rightarrow |a| = |c|$$

$$\text{فإذا } |a| = |b| \text{ فإن } |a| = |b| \text{ وإذا } |a| = -|b| \text{ فإن } |a| = |b|$$

$$\text{فإذا كان } |a| = |b| \text{ فإن } |a| = |b|$$

$$\text{فإذا } |a| = |b| \text{ فإن } |a| = |b| \text{ وإذا } |a| = -|b| \text{ فإن } |a| = |b|$$

ويشكل عام إذا كان $|a| = |b|$ فإن

$$\text{فإذا } |a| = |b| \text{ فإن } |a| = |b| \text{ وإذا } |a| = -|b| \text{ فإن } |a| = |b|$$

مثال:

أوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية:

$$(1) |x| = 3 \quad (2) |x| = 1 \quad (3) |x| = 2$$

$$(4) |x| = 2 \quad (5) |x| = 1 \quad (6) |x| = 2 \quad (7) |x| = 1$$

$$(8) |x| = 2 \quad (9) |x| = 1 \quad (10) |x| = 2$$

الحل:

يتم الحل بالتخلص من رمز القيمة المطلقة $|x|$ ، وذلك بإعادة الترميز،

وإحدى القيمتين الموجبة والسالبة للطرف الأيمن كما مرّ أعلاه هكذا:

$$(1) |x| = 3 \Rightarrow x = 3 \text{ أو } x = -3 \quad (2) |x| = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ أو } x = -1$$



وكذلك $\{2 \leq x\} - \{x \leq 7\}$

$$x \leq 1 + x = 7 \quad , \quad x \leq 1 + x = 2$$

$$x \leq 1 + x = 2 \quad , \quad x \leq 1 + x = 7$$

$$x \leq 1 + x = 2 \quad , \quad x \leq 1 + x = 7$$

$$x \leq 1 + x = 2 \quad , \quad x \leq 1 + x = 7$$

$$x \leq 1 + x = 2 \quad , \quad x \leq 1 + x = 7$$

مجموعة الحل $\{x \leq 2\}$ تحقق من صحة الحل.

(II) حل أنظمة من المعادلات الخطية التي تحتوي اختراعات أكبر عدد صحيح (اختراعات درجيه أو مكعبه)

مثال

أوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية

$$(I) \quad x \leq 1 + x = 2 \quad , \quad x \leq 1 + x = 7$$

$$(II) \quad x \leq 1 + x = 2 \quad , \quad x \leq 1 + x = 7$$

كل حل واحد

يتم الحل بإعادة التعريف لتتخلص من رمز أكبر عدد صحيح 1 وذلك

بإستخدام التعريف العام للاختراعات (من) = (من) وهو

$$x \leq 1 + x = 2 \quad , \quad x \leq 1 + x = 7$$

$$(I) \quad x \leq 1 + x = 2 \quad , \quad x \leq 1 + x = 7$$

$$x \leq 1 + x = 2 \quad , \quad x \leq 1 + x = 7$$

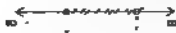
$$x \leq 1 + x = 2 \quad , \quad x \leq 1 + x = 7$$

الانترفاك الجبرية



ونمثل المجموعة متقيدة: من $\left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right]$

ونمثل المجموعة على خط الاعداد:



حل: (ii) $6 \leq 2x$ منفر و إعادة التمرين:

منفر $6 \leq 2x$ من $1 > 1$ و إعادة 6 لجميع الأطراف

$$3 \leq x < 1$$

ونقسمه جميع الأطراف على 2 مع تغير اشارة
التيان أو علامة الترتيب هكذا

$$3 < x < \frac{1}{2}$$

أي $\frac{1}{2} < x < 3$ مجموعة الحل $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ من $2 \geq 2$

ونمثل الفترة من $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ وعلى خط الاعداد



ونلتحق من صحة الحل. انض من $2.6 = \frac{26}{10}$

أي أن $2 - 6 = 4 - \frac{26}{10} = 4 - 2.6 = 1.4 = 1.4 - 1 = 0.4 = 1 - 0.6 = 1$ منفر

وهذا يحقق الشرط

حل (iii) من $1 \leq x$ منفر ، حيث $2 \geq x > 1$

نعيد نعيد على الفترة $[1, 2)$

وحيث أن طول النوجة $1 = \left| \frac{1}{-1} \right|$ هكذا:



نمرق أولاً من 1 على الفترة هكذا:





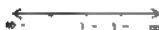
$$\left. \begin{array}{l} 1 > x > 2 = \\ 0 > x \geq 1 = \\ 1 > x \geq 0 = \end{array} \right\} = \{x\}$$

ومن المعادلة: $x - \{x\} = \text{صفر}$

$$\frac{\{x\} + \{x\}}{\{x\}} = x$$

$$\therefore \{x\} = \{1 - 2 = -1\}$$

مجموعة الحل $\{x\} = \{-1, 1\}$ ولا تكمل بشرط



وأيضا على خط الأعداد

نقاطه حلقية فقط.

وللتسقي: $x = -1$

$$\text{أي } x - \{x\} = 2 - \{2\} = 2 - 1 = 1 = \text{صفر وهو ممكن.}$$

(iii) حل أنظمة من المعادلات تحتوي لثلاثت كثيرات الحدود (متغير واحد) وس درجات متعددة كما في المثال:

مثال:

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية:

$$(1) \quad x^2 + 6x + 11 = \text{صفر}$$

$$(2) \quad x^2 - 1 = \text{صفر}$$

$$(3) \quad x^2 + 2x + 1 = \text{صفر}$$

$$(4) \quad x^2 - 8 = \text{صفر}$$

$$(5) \quad x^2 + 16 = \text{صفر}$$

حل ۴۲

وکنند از آن به عنوان یک

يتجانب الطرف الأيمن وهو الاقتران المرافق للمعللة كما يلي

٣ س' (س' - ١٦) = ص' ص' اخراج العامل المشترك آس'

۲ س' (میں + ۴) (س = ۱) = منفر ثم تحاول الفرق بين مربعين

وعليها ٢ من^٢ = مضر ← س = مضر الجذر الأول للمعادلة

س = ١ = صفر ← س = ٢ = ٤
الجزء الثاني للمعادلة

١ - ٢ = ٣ = صفر ← من ٤
الجذر الثالث للمعادلة

مجموعة الحل = $\{ -1, 1, 5 \}$ تحقق من صحة الحل إلى أن تستد.

حل (۳) :

ويكتبه: ص ٩ - ٢ ص ١ + ص ٢ ص ٣

دحلل الطرف الأيمن وهو الاشتراط للرافق للمحاكمة حكما على،

من (ب) - ٢ من (١ + ١) = ٢ عنصر

من (من' - ١) (من' - ١) = منقر

$$\text{من (س) } (1 + \text{س}) (1 - \text{س}) (1 + \text{س}) (1 - \text{س}) = \text{جواب}$$

ومنها: من مظهر جذر المعادلة الأولى

من ١ = منظر — من ١ = جذور الحروف المتكسرة

من ١ = صفر ← من ١ = حجر العاقل الثالث

والجذور - ١ ، ١ مكرران

مجموعة الحل = $\{1, 2, 3\}$ لأن $1 + 1 = 2$ ، $2 + 1 = 3$ ، $3 + 1 = 4$ ، $4 + 1 = 5$ ، $5 + 1 = 6$ ، $6 + 1 = 7$ ، $7 + 1 = 8$ ، $8 + 1 = 9$ ، $9 + 1 = 10$ ، $10 + 1 = 11$ ، $11 + 1 = 12$ ، $12 + 1 = 13$ ، $13 + 1 = 14$ ، $14 + 1 = 15$ ، $15 + 1 = 16$ ، $16 + 1 = 17$ ، $17 + 1 = 18$ ، $18 + 1 = 19$ ، $19 + 1 = 20$ ، $20 + 1 = 21$ ، $21 + 1 = 22$ ، $22 + 1 = 23$ ، $23 + 1 = 24$ ، $24 + 1 = 25$ ، $25 + 1 = 26$ ، $26 + 1 = 27$ ، $27 + 1 = 28$ ، $28 + 1 = 29$ ، $29 + 1 = 30$ ، $30 + 1 = 31$ ، $31 + 1 = 32$ ، $32 + 1 = 33$ ، $33 + 1 = 34$ ، $34 + 1 = 35$ ، $35 + 1 = 36$ ، $36 + 1 = 37$ ، $37 + 1 = 38$ ، $38 + 1 = 39$ ، $39 + 1 = 40$ ، $40 + 1 = 41$ ، $41 + 1 = 42$ ، $42 + 1 = 43$ ، $43 + 1 = 44$ ، $44 + 1 = 45$ ، $45 + 1 = 46$ ، $46 + 1 = 47$ ، $47 + 1 = 48$ ، $48 + 1 = 49$ ، $49 + 1 = 50$ ، $50 + 1 = 51$ ، $51 + 1 = 52$ ، $52 + 1 = 53$ ، $53 + 1 = 54$ ، $54 + 1 = 55$ ، $55 + 1 = 56$ ، $56 + 1 = 57$ ، $57 + 1 = 58$ ، $58 + 1 = 59$ ، $59 + 1 = 60$ ، $60 + 1 = 61$ ، $61 + 1 = 62$ ، $62 + 1 = 63$ ، $63 + 1 = 64$ ، $64 + 1 = 65$ ، $65 + 1 = 66$ ، $66 + 1 = 67$ ، $67 + 1 = 68$ ، $68 + 1 = 69$ ، $69 + 1 = 70$ ، $70 + 1 = 71$ ، $71 + 1 = 72$ ، $72 + 1 = 73$ ، $73 + 1 = 74$ ، $74 + 1 = 75$ ، $75 + 1 = 76$ ، $76 + 1 = 77$ ، $77 + 1 = 78$ ، $78 + 1 = 79$ ، $79 + 1 = 80$ ، $80 + 1 = 81$ ، $81 + 1 = 82$ ، $82 + 1 = 83$ ، $83 + 1 = 84$ ، $84 + 1 = 85$ ، $85 + 1 = 86$ ، $86 + 1 = 87$ ، $87 + 1 = 88$ ، $88 + 1 = 89$ ، $89 + 1 = 90$ ، $90 + 1 = 91$ ، $91 + 1 = 92$ ، $92 + 1 = 93$ ، $93 + 1 = 94$ ، $94 + 1 = 95$ ، $95 + 1 = 96$ ، $96 + 1 = 97$ ، $97 + 1 = 98$ ، $98 + 1 = 99$ ، $99 + 1 = 100$ ، $100 + 1 = 101$ ، $101 + 1 = 102$ ، $102 + 1 = 103$ ، $103 + 1 = 104$ ، $104 + 1 = 105$ ، $105 + 1 = 106$ ، $106 + 1 = 107$ ، $107 + 1 = 108$ ، $108 + 1 = 109$ ، $109 + 1 = 110$ ، $110 + 1 = 111$ ، $111 + 1 = 112$ ، $112 + 1 = 113$ ، $113 + 1 = 114$ ، $114 + 1 = 115$ ، $115 + 1 = 116$ ، $116 + 1 = 117$ ، $117 + 1 = 118$ ، $118 + 1 = 119$ ، $119 + 1 = 120$ ، $120 + 1 = 121$ ، $121 + 1 = 122$ ، $122 + 1 = 123$ ، $123 + 1 = 124$ ، $124 + 1 = 125$ ، $125 + 1 = 126$ ، $126 + 1 = 127$ ، $127 + 1 = 128$ ، $128 + 1 = 129$ ، $129 + 1 = 130$ ، $130 + 1 = 131$ ، $131 + 1 = 132$ ، $132 + 1 = 133$ ، $133 + 1 = 134$ ، $134 + 1 = 135$ ، $135 + 1 = 136$ ، $136 + 1 = 137$ ، $137 + 1 = 138$ ، $138 + 1 = 139$ ، $139 + 1 = 140$ ، $140 + 1 = 141$ ، $141 + 1 = 142$ ، $142 + 1 = 143$ ، $143 + 1 = 144$ ، $144 + 1 = 145$ ، $145 + 1 = 146$ ، $146 + 1 = 147$ ، $147 + 1 = 148$ ، $148 + 1 = 149$ ، $149 + 1 = 150$ ، $150 + 1 = 151$ ، $151 + 1 = 152$ ، $152 + 1 = 153$ ، $153 + 1 = 154$ ، $154 + 1 = 155$ ، $155 + 1 = 156$ ، $156 + 1 = 157$ ، $157 + 1 = 158$ ، $158 + 1 = 159$ ، $159 + 1 = 160$ ، $160 + 1 = 161$ ، $161 + 1 = 162$ ، $162 + 1 = 163$ ، $163 + 1 = 164$ ، $164 + 1 = 165$ ، $165 + 1 = 166$ ، $166 + 1 = 167$ ، $167 + 1 = 168$ ، $168 + 1 = 169$ ، $169 + 1 = 170$ ، $170 + 1 = 171$ ، $171 + 1 = 172$ ، $172 + 1 = 173$ ، $173 + 1 = 174$ ، $174 + 1 = 175$ ، $175 + 1 = 176$ ، $176 + 1 = 177$ ، $177 + 1 = 178$ ، $178 + 1 = 179$ ، $179 + 1 = 180$ ، $180 + 1 = 181$ ، $181 + 1 = 182$ ، $182 + 1 = 183$ ، $183 + 1 = 184$ ، $184 + 1 = 185$ ، $185 + 1 = 186$ ، $186 + 1 = 187$ ، $187 + 1 = 188$ ، $188 + 1 = 189$ ، $189 + 1 = 190$ ، $190 + 1 = 191$ ، $191 + 1 = 192$ ، $192 + 1 = 193$ ، $193 + 1 = 194$ ، $194 + 1 = 195$ ، $195 + 1 = 196$ ، $196 + 1 = 197$ ، $197 + 1 = 198$ ، $198 + 1 = 199$ ، $199 + 1 = 200$ ، $200 + 1 = 201$ ، $201 + 1 = 202$ ، $202 + 1 = 203$ ، $203 + 1 = 204$ ، $204 + 1 = 205$ ، $205 + 1 = 206$ ، $206 + 1 = 207$ ، $207 + 1 = 208$ ، $208 + 1 = 209$ ، $209 + 1 = 210$ ، $210 + 1 = 211$ ، $211 + 1 = 212$ ، $212 + 1 = 213$ ، $213 + 1 = 214$ ، $214 + 1 = 215$ ، $215 + 1 = 216$ ، $216 + 1 = 217$ ، $217 + 1 = 218$ ، $218 + 1 = 219$ ، $219 + 1 = 220$ ، $220 + 1 = 221$ ، $221 + 1 = 222$ ، $222 + 1 = 223$ ، $223 + 1 = 224$ ، $224 + 1 = 225$ ، $225 + 1 = 226$ ، $226 + 1 = 227$ ، $227 + 1 = 228$ ، $228 + 1 = 229$ ، $229 + 1 = 230$ ، $230 + 1 = 231$ ، $231 + 1 = 232$ ، $232 + 1 = 233$ ، $233 + 1 = 234$ ، $234 + 1 = 235$ ، $235 + 1 = 236$ ، $236 + 1 = 237$ ، $237 + 1 = 238$ ، $238 + 1 = 239$ ، 2



٨) (١١) تجزئة الافتراضات الجبرية النسبية أو (تجزئة الكسور الجبرية).

Partial of the Rational Functions

من المعلوم أن ناتج جمع الافتراضات النسبية:

$$\frac{6(1+x)}{(1+x)(x-2)} + \frac{8(1+x)}{(1+x)(x-2)} = \frac{6}{x-2} + \frac{8}{1+x}$$

توحيد المقامات

$$\frac{6(1+x) + 8(x-2)}{(1+x)(x-2)} = \frac{6(1+x) + 8(x-2)}{(1+x)(x-2)}$$

$$\frac{6(1+x) + 8(x-2)}{(1+x)(x-2)} = \frac{6(1+x) + 8(x-2)}{(1+x)(x-2)}$$

$$\frac{6(1+x) + 8(x-2)}{(1+x)(x-2)} = \frac{6}{x-2} + \frac{8}{1+x}$$

والعكس لنذكر في السؤال بطريقة عكسية للتحقق.

عند السهل ليعمل الطرف اليسار للتحقق من افتراضات نسبية واحد هو $\frac{6(1+x) + 8(x-2)}{(1+x)(x-2)}$

افتراضات نسبية هما $\frac{6}{x-2} + \frac{8}{1+x}$ (كما هو واضح أعلاه)

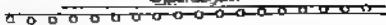
الجواب:

هذه العملية العكسية والتي نحن بمسندتها الآن تسمى تجزئة الافتراضات النسبية (أو الكسور الجبرية).

ولم تكن كما هي (شروط أن يكون درجة البسط أقل من درجة المقام في جميع الحالات) وهذا الشرط خاص ومقبول في هذا المستوى والذات.

يترك عملية تجزئة الكسور الجبرية أو الافتراضات النسبية للبيان

$$\frac{6}{x-2} + \frac{8}{1+x} = \frac{6(1+x) + 8(x-2)}{(1+x)(x-2)} = \frac{6(1+x) + 8(x-2)}{(1+x)(x-2)}$$



بعد اعادة توحيد المقامات $\frac{13 \text{ من } 12}{\text{من } 3 - \text{من } 4} = \frac{13 \text{ من } 12}{\text{من } 3 - \text{من } 4} = \frac{13 \text{ من } 12}{\text{من } 3 - \text{من } 4}$

وهذا أن الافتراضات التسوية
متساوية والافتراضات متساوية
أيضا

.. بسط الكسر الأول - بسط الكسر الثاني (الكسور الجبرية)

∴ $13 \text{ من } 12 = 13 \text{ من } 12 = 13 \text{ من } 12$

∴ $13 \text{ من } 12 = 13 \text{ من } 12 = 13 \text{ من } 12$

أي أن الافتراضات متساوية:

∴ $13 \text{ من } 12 = 13 \text{ من } 12 = 13 \text{ من } 12$

وكذلك $13 \text{ من } 12 = 13 \text{ من } 12 = 13 \text{ من } 12$
جميعاً

$13 \text{ من } 12 = 13 \text{ من } 12 = 13 \text{ من } 12$

لكن $13 \text{ من } 12 = 13 \text{ من } 12 = 13 \text{ من } 12$

وبهذه الطريقة تمت تجزئة الكسر
الجبري إلى رصين أو أكثر حسب

عوامل المقام

ملحوظة يمكن الاستغناء عنها:

يمكن إجراء عملية التجزئة بطريقة أخرى دون اللجوء إلى الافتراضات متساوية،

بما أن $\frac{13 \text{ من } 12}{\text{من } 3 - \text{من } 4} = \frac{13 \text{ من } 12}{\text{من } 3 - \text{من } 4} = \frac{13 \text{ من } 12}{\text{من } 3 - \text{من } 4}$

فإن $\frac{13 \text{ من } 12}{\text{من } 3 - \text{من } 4} = \frac{13 \text{ من } 12}{\text{من } 3 - \text{من } 4} = \frac{13 \text{ من } 12}{\text{من } 3 - \text{من } 4}$



$$(1 + \frac{1}{n})^n = 2 \quad n = 12 \quad \text{وینا}$$

الإيجاد فيها أقسام ب (تجديد من + 1 = عشر ← ح - 1) (1)

$$(1 + 1 -)_{\psi} = (1 -_{\psi}) 1 = 11 - (1 -) 11$$

$$A = I \leftarrow [a \quad b \quad c] \quad -$$

الإيجاد قيمة ب تقدم أ (يوجد من - \$ = صفر - < من = 1)

$$(1 + \lambda)u + (1 - \lambda)v = \bar{u} = (1)u, \therefore$$

۶۵ = ۵ ← ۵ = ۵ ۵ = ۵ ← ۵ = ۵ ۵ = ۵ ← ۵ = ۵

مهموظفۂ اخباری:

ويستثمر صناعة التجهيز التي نحن بصددتها على الافتراضات النسبية وانكسور الأجهزة التي مقابلاتها تحمل الى عوامل اولية خطية فقط.

مقالہ

جزئی الاقدان التمسیمی (س) = $\frac{19 - 4}{19 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19} = \frac{15}{19}$ الى الاقدانات اخرى.

بعد تحليل المقدم الى $\frac{y-1}{(y+1)(y-2)(y-3)} = \frac{y-1}{y^3-6y^2+11y-6}$

عوامل خطية باستناد لم نظرية الحوامل والقسمية.

مكون $\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-3} + \frac{1}{1+x} = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 9 - x^2 - 4x - 4}$

عدد عوامل الختام هو ٢

أي أم.

$$\frac{(2 - \text{آس}) (2 + \text{آس}) + (1 + \text{آس}) + (2 + \text{آس}) (2 - \text{آس})}{(2 + \text{آس}) (2 - \text{آس}) (1 + \text{آس})} = \frac{7}{3}$$

لايجاد فيها ب نقرص من $\mathbb{T} = \text{لحم أ ، ج صا}$

$$(Y - y)(1 + Y)_{-} + (Y + y)(1 + Y)_{+} + (Y + y)(Y - y)1 = Y - (Y)1$$



$$27 = 7 = 10 \text{ ب}$$

$$10 = 10 \text{ ب} \leftarrow \text{ب} = 1$$

لإيجاد قيمة أنقرض من -1 لنعلم ب $+$ ج معاً

$$\text{أي أن } 11 = (1 -) = 7 - (2 -) = 7 - \text{صفر} + \text{صفر} = 7 \text{ معاً من أجله}$$

$$18 = 16 \leftarrow 2 = 1$$

لإيجاد قيمة ج نقرض من -2 لنعلم آ $+$ ج معاً

$$\text{أي أن } 11 = (2 -) = 7 - \text{صفر} + \text{صفر} = 7 \text{ معاً من أجله}$$

$$20 = 10 \leftarrow 0 = -$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \text{ من } 1}{\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \text{ من } 1} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \text{ من } 1$$

مثال

$$\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \text{ من } 1$$

بما أن درجة البسط = درجة المقام

فلنأخذ تجري عملية القسمة المتوالية فقم أولاً بتصبح درجة البسط أقل من درجة

المقام فقم بـ (القسمة السابقة) هكذا.

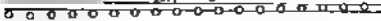
$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 + \frac{1}{2} \\ \hline 1 + \frac{1}{2} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\therefore \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \text{ والآن نتجرب العكس}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\text{أي أن } \frac{(1 + \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2})}{(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2})} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}}$$





$$2 = (1 - 1) + (1 + 1) = 1$$

لايجاد اعداد ب يوضع من 1

$$1 = (1 - 1) + (1 - 1) = 0 \leftarrow 1 = 1$$

لايجاد ب بوضع من 1

$$2 = (1 + 1) + (1 - 1) = 1$$

$$\therefore \frac{1}{1 - 1} + \frac{1}{1 - 1} = \frac{1 + 1}{1 - 1}$$

مثال

$$\frac{1 + 1}{1 - 1} = \frac{1 + 1}{1 - 1}$$

بما ان درجة البسط اكبر من درجة المقام هنا نجري القسمة الطويلة لتصبح درجة البسط اقل من درجة المقام هكذا

$$\frac{1 + 1}{1 - 1} = \frac{1 + 1}{1 - 1}$$

$$\therefore \frac{1 + 1}{1 - 1} = \frac{1 + 1}{1 - 1}$$

ونستمر بمحاذاة التجزئة

$$\frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{1 - 1}$$

لا مذهب اضع من 1

$$1 = (1 - 1) + (1 - 1) = 0 \leftarrow 1 = 1$$

لا مذهب ب بوضع من 1

$$\frac{1}{1 - 1} = 1 \leftarrow 1 = 1 \leftarrow 1 = 1$$



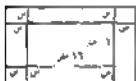


$$\frac{1}{1+s} + \frac{1}{2+s} + s = \frac{1-s-2s^2}{2-s-s^2}$$

$$\frac{1}{1+s} - \frac{1}{(2-s)^2} + s =$$

مثال تطبيقي:

بركة سباحة مستطيلة الشكل بحدود ١٦ : ١٢ م أحيطت بممر اسبتي منتظم مساحته ١٢٨ متر مربع احسب طول ضلع الممر.



نفرض أن طول ضلع الممر = س متر

فطول البركة والممر = ١٦ + ٢ س متر

وعرض البركة والممر = ١٢ + ٢ س متر

وبما أن

مساحة الممر = مساحة البركة والممر - مساحة البركة. إذن

$$128 = (16 + 2s)(12 + 2s) - (16 \times 12)$$

$$128 = 192 + 32s + 4s^2 - 192$$

$$4s^2 + 32s - 128 = 0$$

ل

$$s = 16 \text{ س} - 22 = \text{متر}$$

$$(س + ١٦) (س - ٢) = \text{متر}$$

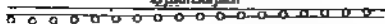
س = ١٦ جواب مفروض حيث الطول لا يمكن أن يكون سالباً

س = ٢ متر عرض الممر

نتحقق طول البركة والممر = ١٦ + ٢ (٢) = ٢٠ متر

عرض البركة والممر = ١٢ + ٢ (٢) = ١٦ متر





مساحة البركة والعر = $(20)(16) = 320$ متر مربع

مساحة العر = مساحة البركة والعر - مساحة البركة

$$220 = (16)(12) -$$

$$320 - 192 = 128 \text{ متر مربع}$$

وهو مكما ورد في السؤال.



(٨ ١٢) أمثلة مطوَّعة على الاقتربات الجبرية

مثال (١)

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 \leq 2 \\ \text{من } 2 - 1 > 1 \end{array} \right\} \text{إذ، مكن في (س) = } \begin{array}{l} \text{أوجد في (٢)، ق (١)، ق (-١)} \end{array}$$

الحل:

في (٢) نأخذ القاعد في (س) = من مكن $1 < 2$

$$\therefore \text{ق (٢) = } 1 = 2$$

في (١) نأخذ القاعد في (س) = من مكن $1 \leq 1$

$$\text{ق (١) = } 1 = 1$$

ق (-١) نأخذ القاعد في (س) = من $2 - 1 > 1$

$$\text{ق (-١) = } 1 - 2 = -1$$

مثال (٢)

أي من الاقتراعين ق (س) = $2 - 1$ ق (س) = $1 + 0$

ق (٢) = من $1 = 0$ واحد لواحد:

الحل

نمثل الاقتراعين بيانياً ونستخدم الاختيار الحسب الأسفل هكذا:

ق (س) = $2 - 1$ من عندما س = صفر ، ق (-١) = $2 - 1 = 1$

وعندما ق (س) = $1 = 0$ س = صفر

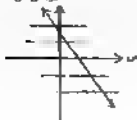
$$1 = 0$$



الانحرافات الجبرية



ص = ق في نس



ص	ق
1	1
2	0

.. ق في نس = 2 - 2 ص الانحراف واحد لوحد يكون الخط الأفقي لا يقطع المحور إلا في نقطة واحدة.

$$ق في نس = 2 - 2 ص + 0$$

$$ق = \frac{2}{2} = \frac{(2 - 2) + 0}{1 + 2} = \frac{0}{3}$$

لم نتمكن من الحصول على النتيجة

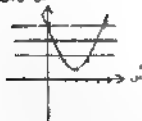
$$ق في (1) = 2 - 2(1) + 0 = 0$$

$$ق في (2) = 2 - 2(2) + 0 = -2$$

$$ق في (3) = 2 - 2(3) + 0 = -4$$

ص	ق
1	0
2	-2
3	-4

ص = ق في نس



ق في نس = 2 - 2 ص + 0 اثنين الانحراف واحد لوحد يكون الخط الأفقي يقطع المحور أكثر من نقطة





مثال (٣):

اعد تعريف الانحراف $|x - m|$ من T دون استخدام بقية القيمة المطلقة

بجد اشارة x موجبة - من T هكذا:

هذا: من (x) من T = صفر

من $(x - T)$ من $(T + x)$ = صفر

أصغره $= T$ ، صفر $= x$



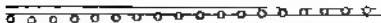
$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & - (x - m) \text{ من } x > 0 \\
 & x - m \text{ من } x \geq 0 \\
 & - (x - m) \text{ من } x < 0
 \end{aligned} \right\} |x - m| \\
 & \left. \begin{aligned}
 & m - x \text{ من } x > 0 \\
 & x - m \text{ من } x \geq 0 \\
 & m - x \text{ من } x < 0
 \end{aligned} \right\} =
 \end{aligned}$$

مثال (٤):

$$\text{إذا كان في } (m) = \frac{m}{1 - m} \text{ ، من } x \neq 1$$

$$\text{هـ } (m) = \frac{m}{1 + m} \text{ ، من } x \neq -1$$

أوجد (ق هـ) (م) ، (ق هـ) (م)



الحل:

$$\frac{\frac{1}{1} - \frac{1}{1}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

مجايله ج

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

مثال (هـ):

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

أوجد في (س) الاختلافات المتكسرة

الطريقة الأولى: في (هـ) في (س) =

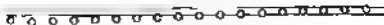
$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

وهو نفسه في (س)

الطريقة الثانية: تضع من =

$$1 = 1$$



مثال (٩)،

مصنع للسجاد ينتج من سجادة يومياً بكمية معينة، تتكلفتها السجادة تساوي (٢٠ من + ٢٥) ديناراً، ويبيع السجادة الواحدة بمبلغ ٧٥ ديناراً، ما هي كمية المنتج بالدينار إذا باع في أحد الأيام ١٢ سجادة؟

بما أن الربح = الأيراد - التكاليف

$$\text{فإن في (س)} = (\text{س} \times ٧٥) - (\text{س} \times ٢٠ + ٢٥)$$

$$\text{ومنها في (س)} = ٧٥ \text{ من} - ٢٠ \text{ من} - ٢٥ = ٧٥ \text{ من} - ٢٠ \text{ من} - ٢٥ = ٣٠$$

$$\therefore \text{في (س)} = ٣٠ - ٢٥$$

$$\therefore \text{الربح في (س)} = (٣٠) (٧٥) - (٣٠) (٢٠) = ١٥٠$$

$$= ١٥٠ - ٦٠ = ٩٠ \text{ دينار}$$

مثال (١٠)،

اكتب قاعدة في (س) كثير الحدود من الدرجة الثانية (تربيعي) إذا علمت

$$\text{أن في (١)} = (١) \text{ صفر، في } (-١) = ١، \text{ في } (٢) = ٤$$

القاعدة العامة: في (س) = $a \times s^2 + b \times s + c$ أي صفر

$$\text{والآن في (١)} = (١) = a \times (١)^2 + b \times (١) + c = \text{صفر}$$

$$\text{أي أن } a + b + c = ٠ \quad (١)$$

$$\text{وكذلك في } (-١) = (١) = a \times (-١)^2 + b \times (-١) + c = ١$$

$$\text{أي أن } a - b + c = ١ \quad (٢)$$

$$\text{وكذلك في } (٢) = (٤) = a \times (٢)^2 + b \times (٢) + c = ٤$$

$$\text{أي أن } ٤a + ٢b + c = ٤ \quad (٣)$$





وهكذا لنبدأ النظام من المعادلات:

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$(1) \quad 1 + 2 = 3$$

$$(2) \quad 2 + 3 = 5$$

$$(3) \quad 1 + 2 + 3 = 6$$

$$(4) \quad 1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 = 3$$

$$(5) \quad 1 + 2 = 3$$

$$(6) \quad 1 + 2 = 3$$

$$(7) \quad 1 + 2 = 3$$

$$(8) \quad 1 + 2 = 3$$

في (8) من 1 من 2 من 3 وهو كما نرى اقتراباً قريباً.

مثال (9):

$$1 + 2 = 3$$

$$(10) \quad 1 + 2 = 3$$

ما نرجو كل من الاقتربات التالية

$$(11) \quad 1 + 2 = 3$$

$$(12) \quad 1 + 2 = 3$$

$$(13) \quad 1 + 2 = 3$$

$$(14) \quad 1 + 2 = 3$$

$$(15) \quad 1 + 2 = 3$$

$$(16) \quad 1 + 2 = 3$$

$$(17) \quad 1 + 2 = 3$$



المتطابقات الجبرية



(أ) هـ (س) = $(2س^2 + 6س + 7) - (2س^2 + 4س - 5)$ يتساوى التوزيع

$$= 9س + 17س^2 - 2س^2 - 10س - 7س + 6س - 2س + 5س + 10س + 1$$

$$= 9س + 15س^2 - 2س^2 - 10س - 7س + 6س - 2س + 5س + 10س + 1$$

مثال (١٢):

أوجد مجموعة الحل للمعادلة $س^2 - 256 = 0$ من صفر في حل الأعداد الحقيقية

$$س^2 - 256 = 0 \text{ من صفر} \quad \text{أخراج من كعامل مشترك}$$

$$(س^2 - 256) = 0 \text{ من صفر} \quad \text{تحليل الفرق بين مربعين}$$

$$(س^2 - 16) = 0 \text{ من صفر} \quad (س^2 - 16) = 0 \text{ من صفر}$$

$$س = 0 \text{ من صفر}$$

$$س + 1 = 0 \text{ من صفر} \quad س = -1$$

$$س - 1 = 0 \text{ من صفر} \quad س = 1$$

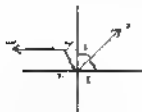
$$س^2 + 16 = 0 \text{ من صفر} \quad \text{ميزها بـ } 16 \quad (س^2 + 16) = 0 \quad 16 = 16 \quad 16 = 16 \quad 16 = 16 \quad 16 = 16$$

ليس لها جذور في حل الأعداد الحقيقية.

مجموعة الحل = $\{1, -1, 16, -16\}$ جذور حقيقية والبالغة في حل الأعداد المركبة

كلمة مائية:

مثال (١٣):



اكتب قاعدة الاضراس المتثل متناه بالشكل

مجموع الاضراس تكوين من 180 درجة

$$ب \text{ ج يمثل لك (س)} = 1 \quad - \quad 1 >$$

$$ب ا يمثل لك (س) = 1 \quad - \quad 1 \geq$$

$$ا ب يمثل لك (س) = 1 \quad - \quad 1 >$$

الافتراضات الجبرية



وعدد حجتها بالافتراض واحد متشعب يكون ق (س):

$$\left. \begin{array}{l} 1 \geq \text{س} \\ 1 > \text{س} \\ 0 \geq \text{س} \end{array} \right\} \text{ق (س) = س}$$

مثال (١٣):

طلب من أحد البنائين اكتمال سور من الحجر، فوجد أنه تم بناء ٨٥ حجراً قبل أن يبدأ بالعمل به، فإذا قام هذا البناء ببناء ٢٥ حجراً يومياً حتى اكتمل بناء السور خلال سبعة أيام، والمطلوب اكتمال الجدول التالي، ثم كتابة قاعدة النمط التي تبين عدد الحجارة المبنية في السور كافتراض في المتغير س.

كلمة الفعل	عدد الحجارة بعد البناء	مجموع حجرات التي بنيت
١	$1 + 85$ (٢٥)	١٢٠
٢	$2 + 85$ (٢٥)	١٥٥
٣	$3 + 85$ (٢٥)	١٩٠
٤	$4 + 85$ (٢٥)	٢٢٥
٥	$5 + 85$ (٢٥)	٢٦٠
٦	$6 + 85$ (٢٥)	٢٩٥
٧	$7 + 85$ (٢٥)	٣٣٠
⋮		
س	$س + 85$ (٢٥)	$٨٥ + س$

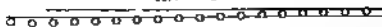
١. ق (س) = ٢٥ + س ٨٥ وهذا الافتراض ينتج النمط السابق

مثال (١٤):

س مجال متغير من الافتراضات التالية:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + \text{س} \\ 1 \geq \text{س} \\ 1 > \text{س} \end{array} \right\} \text{ق (س) = س}$$





الحل

مجال القاعدة الأولى (1 ، 50)

ومجال القاعدة الثانية (1 ، 50)

؛ مجال الاقتران = (1 ، 50) \cup (50 ، 1) = (1 ، 50) \cup (50 ، 1)

كما في الشكل



الجواب المجال ح

$$(1) \text{ في (س) } = \frac{1}{2} \text{ من}$$

نستنتج أصفار المقام من ح هكذا

$$2 - \text{ من } \neq \text{ صفر}$$

$$\begin{array}{r} 2 - \\ \hline 2 - \end{array}$$

$$2 \neq \text{ من}$$

فالجواب، مجال الاقتران = ح - { 2 } أو من $\neq 2$

$$(2) \text{ في (س) } = \frac{1 + 2}{2 - \text{ من} - 1}$$

نستنتج أصفار المقام من ح هكذا:

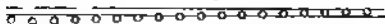
$$2 - \text{ من} - 1 \neq \text{ صفر}$$

$$(2 - \text{ من}) (2 + \text{ من}) \neq \text{ صفر}$$

$$2 \neq 2 - \text{ من}$$

الجواب مجال الاقتران = ح - { 2 ، 2 } أو من $\neq \{ 2 ، 2 \}$





(iv) في (د) $\sqrt{x-1}$

إد كفى دليل الجذر زوجياً فإن ما بداخله يجب أن يكون موجبة أو صفر
أي: $x-1 \geq 0$ $x \geq 1$
من $x \neq 1$

الجواب: مجال الاقتران $(1, \infty)$

(v) في (س) $\sqrt{x-2}$

$x-2 \geq 0$ صفر

$x \geq 2$

من $x \geq 2$ (المنكسرة إشارة الترقيب أو التباين لأننا ضربنا بمعكوبة سالبة)

الجواب: مجال الاقتران $(2, \infty)$

(vi) في (س) $\sqrt{\frac{x}{x-3}}$

بما أن الجذر زوجي لتمام فوجب أن يكون ما بداخله موجبة فقط (ليس صفر)
وليس سالبة) هكذا:

$x-3 > 0$ صفر

$$\frac{x}{x-3} > 0 \iff \frac{x}{x-3} < 0$$

الجواب: مجال الاقتران $(0, 3)$

(vii) في (س) $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$

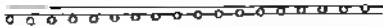
مستثنى من ح امضار التمام ونجد مجال البسط أيضاً هكذا:

مجال البسط: $x+2 \geq 0$ صفر ، $x \geq -2$

مجال المقام: $x-1 \neq 0$

مجال الاقتران $(-2, 1) \cup (1, \infty)$





مثال (١٥)

$$(1) \text{ إذا كان في } (1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$(2) \text{ إذا كان في } (1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

أوجد (1) (2) (3) (4) (5)

$$\text{الحل: (1) إذا كان في } (1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$2 = (1) + (1) =$$

$$\text{أو نجد (2) إذا كان في } (1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\text{وبعض بدل من } 1 \text{ هكذا (3) } 2 = (1) + (1) + (1)$$

$$(4) \text{ إذا كان في } (1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$(1) = (1) - (1) =$$

$$\text{أو نجد (5) إذا كان في } (1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\text{وبعض بدل من } 1 \text{ هكذا: (6) } 2 = (1) + (1) + (1) + (1) + (1) + (1)$$

$$(7) \text{ إذا كان في } (1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$1 = (1) + (1) =$$

$$\text{أو نجد (8) إذا كان في } (1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$



وبعوض بدال من 1 هكذا (ق) هـ = (1) 1 = 1 - 1 + 1 = 1

$$1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$$

(ب) (ق) هـ = (1)

$$1 = \frac{1 - 1 + 1 - 1 + 1}{1 + 1 - 1 + 1 - 1} = \frac{1 - 1 + 1}{1 + 1 - 1} = \frac{(1) \text{ ق. هـ}}{(1) \text{ هـ}} =$$

أو لنقسم في (ق) على هـ (ق) هكذا يلي:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 + 1 - 1 \\ \hline 1 - 1 + 1 \\ 1 - 1 + 1 \\ \hline 1 - 1 + 1 \end{array}$$

$$\frac{1 - 1 + 1}{1 + 1 - 1} + 1 = \frac{1 - 1 + 1}{1 + 1 - 1} + 1 = 1$$

$$\frac{1 - 1 + 1}{1 + 1 - 1} + 1 = \frac{1 - 1 + 1}{1 + 1 - 1} + 1 = 1$$

$$1 =$$

مثال (١٩):

$$|1 - 1| = |1 - 1|$$

بعد إزالة رموز التهمة للخطأ:

$$1 - 1 = 1 - 1$$

$$1 - 1 = 1 - 1$$

$$1 - 1 = 1 - 1$$

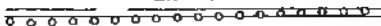
$$1 - 1 = 1 - 1$$

$$1 - 1 = 1 - 1$$

$$1 - 1 = 1 - 1$$

$$\left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{1} \right\}$$





مثال (١٧):

ما قيمة a ، b إذا كان

$$5 \text{ من } 2 \text{ من } 1 = 1 \text{ من } 1 - 5 \text{ من } 6 \text{ من } 1 + 1 + 1 \text{ من } 4 \text{ من } 3 + 19 \text{ من } 2 \text{ من } 2 \text{ من } 2$$

بما أن الطرفين متساويين، وبما أنهما كثيرًا جود من الدرجة الثالثة، فسوف
يسقط الطرف الأيسر هكذا:

$$5 \text{ من } 2 - 1 \text{ من } 1 = 1 \text{ من } 1 - 5 \text{ من } 6 + 19 \text{ من } 2 - 1 \text{ من } 1 + 1 \text{ من } 4 + 19 \text{ من } 2 + 28$$

$$5 \text{ من } 2 - 1 \text{ من } 1 = 1 \text{ من } 1 - 5 \text{ من } 6 + 19 \text{ من } 2 - 1 \text{ من } 1 + 1 \text{ من } 4 + 19 \text{ من } 2 + 28$$

فإن المعادلات المتطرفة متساوية ومنها:

$$(1) \quad 19 + 1 = 5$$

$$(2) \quad 47 - 1 = 2 - 1$$

$$(3) \quad 28 + 1 = 1 + 19 + 2 + 19$$

$$(4) \quad 19 = 1 + 1$$

$$(5) \quad 19 = 1 - 1$$

$$(6) \quad 19 = 1 + 1$$

يكتب هما للمعادلتان (1) $19 + 1 = 5$ (1) $19 = 5 - 1$ ^{نحذف} ^ب ^{من} ^{الطرف}

$$(2) \quad 47 = 1 - 1$$

$$(3) \quad 28 = 1 + 19$$

$$(4) \quad 19 = 1 + 1$$

$$(5) \quad 19 = 1 - 1$$

$$1 = 1$$





مثال (١٨)،

ما قيمة x التي تجعل من $3 = 2$ عاملاً من عوامل (x) $2 - x^2 + 1 + x^3$ من

الحل:

حسب يتكون من 2 عاملاً من عوامل (x) يجب أن يكون في $(2) =$ صفر

$$\text{وعليه في } (2) = 2 - x^2 + 1 + x^3 = \text{صفر}$$

$$2 - x^2 + 1 + x^3 = \text{صفر}$$

$$3 - x^2 + x^3 = \text{صفر}$$

$$x^3 - x^2 + 3 = 0$$

$$x^3 - x^2 + 3 = 0$$

$$\frac{x^3 - x^2 + 3}{x}$$

مثال (١٩)،

ملي يكون الاثنان $x = 1$ عاملاً من عوامل (x) $x^3 - x^2 + 1$ من

في $x = 1$ ، $x = 0$ صفر

استنتج ذلك من الأمثلة السابقة:

صفر الاثنان $x = 1$ عاملاً من عوامل (x) $x^3 - x^2 + 1$ من

$$\text{عندما } x = 1 \text{ ، } x^3 - x^2 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$$

في $(-1) = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$ صفر $x = -1$ ليس عاملاً من عوامل (x)

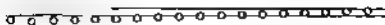
$$\text{عندما } x = 2 \text{ ، } x^3 - x^2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5 \neq 0$$

في $(-2) = 8 - 4 + 1 = 5 \neq 0$ صفر $x = -2$ ليس عاملاً من عوامل (x)

$$\text{عندما } x = 3 \text{ ، } x^3 - x^2 + 1 = 27 - 9 + 1 = 19 \neq 0$$

في $(-3) = 27 - 9 + 1 = 19 \neq 0$ صفر $x = -3$ ليس عاملاً من عوامل (x)





والتي هي في (5) $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$

وهي (5) $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$

وعليه فإن في (5) $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$

ولكن في (5) $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$

$$Y^2 = 1 \quad Y^2 = 1 \quad Y^2 = 1$$

في (5) $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$

⋮

وعلى نفس القالب إذا أمكننا التحل فإننا نستنتج أن:

في (5) $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$

في (5) $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$ $Y^2 = 1$





(٩) حلل الاثنان في (س) = من $2 + 2$ من $12 - 2$ س إلى عوامته الأولى

$$\{ (س - 2) (س + 1) (س + 20) \}$$

{ ارشاد استس بنظرية الباقي والقسمة }

(٧) اوجد باقي قسمة في (س) = من $2 - 1$ من $2 + 2$ س - ٧ على ه (س) = من $2 + 2$

$$\{ 12 \}$$

(٨) ما باقي قسمة في (س) = من $2 - 1$ من $2 + 2$ من $1 + 1$ من $1 - 1$ من

$$\text{هي ه (س) = من } 2 - 1 \text{ من } 2 + 2 \text{ من } 2$$

{ ارشاد استس بالقسمة الطويلة }

(٩) ما خارج قسمة في (س) = من $2 - 1$ من $2 + 2$ من $1 - 1$ من

$$\text{على ه (س) = من } 2 - 1$$

(١٠) إذا كان في (س) = من ه (س) = من

أوجد (أ) (ب) (ج) ه (س) (د) ه (س) (هـ) في (س)

(١١) ماذا نستنتج وكيف نثبت ذلك؟

{ ارشاد في (س) = من اثنان متساوي }

(١٢) اوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات

$$\{ 2, 1 \}$$

$$(١) \text{ من } 2 = 1$$

$$\{ 1, 1, 1 \}$$

$$(٢) |س| = |س|$$

$$\{ \}$$

$$(٣) س + 1 = 2$$





$$(12, 13) \text{ شكل في (س) } = 2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 + 9^2 \text{ من } 2$$

$$هـ (س) = 2 - 2$$

$$\text{أوجد } \left(\frac{1}{2} \right) (1) \quad \{ \text{مقرر} \}$$

$$(13) \text{ إذا شكل في (س) } = 2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2$$

$$(11) \text{ ، } (12) \text{ ، } (13) \text{ ، } (14) \text{ ، } (15) \text{ ، } (16) \text{ ، } (17) \text{ ، } (18) \text{ ، } (19) \text{ ، } (20)$$

$$(14) \text{ إذا شكل في (س) } = 2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2$$

$$\text{أوجد } (1) \text{ ، } (2) \text{ ، } (3) \text{ ، } (4) \text{ ، } (5) \text{ ، } (6) \text{ ، } (7) \text{ ، } (8) \text{ ، } (9) \text{ ، } (10)$$

$$(1) \text{ ، } (2) \text{ ، } (3) \text{ ، } (4) \text{ ، } (5) \text{ ، } (6) \text{ ، } (7) \text{ ، } (8) \text{ ، } (9) \text{ ، } (10)$$

$$(15) \text{ إذا شكل في (س) } = \frac{9^2}{2} \text{ من } 1 \text{ من } 1$$

$$\text{هـ (س) } = \frac{9^2}{2} \text{ من } 1 \text{ من } 1$$

$$\text{أوجد } (1) \text{ ، } (2) \text{ ، } (3) \text{ ، } (4) \text{ ، } (5) \text{ ، } (6) \text{ ، } (7) \text{ ، } (8) \text{ ، } (9) \text{ ، } (10)$$

$$\{ \text{س} ، \text{س} \}$$

$$(16) \text{ حلل الانتماءات في (س) } = 2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2$$

$$\{ (1) \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \}$$

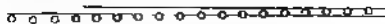
$$\text{وكذلك الانتماءات في (س) } = 2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2$$

$$\{ (1) \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \}$$

$$\text{ثم كذلك الانتماءات في (س) } = 2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2$$

$$\{ (1) \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \text{ من } 9^2 \}$$

$$\{ \text{أرشد ، استمع ، استمع ، استمع ، استمع ، استمع ، استمع ، استمع ، استمع ، استمع} \}$$



(١٧) إذا كان $ق = ٢ + ٢$ من $١ + ٢$ هـ (من) $٢ = ٢ + ٢$ هـ (من) $٢ = ٢ + ٢$ هـ (من)

أوجد (ق - هـ) من (هـ) ، $\left(\frac{ق}{هـ} \right)$ (من) ومجال كل منهما

(١٨) إذا كان $ق = \frac{١}{٢ + ٢}$ من ١ فما قيمة $ق(٢)$

$\left\{ \frac{١}{٢} \right\}$

(١٩) أوجد مجال كلٍّ من الافتراضات التالية:

(١) $ق = \sqrt{٢ + ٢}$ من ٢ ، $ح = (٢٠ - ٢٠)$

(٢) $ق = \frac{٢ - ٢}{٢ - ٢}$ من ٢ ، $ح = \{ ٢ \pm ٢ \}$

(٢٠) إذا كان $ق = ٢ + ٢$ من $٢ + ٢$ هـ (من)

هـ (من) $٢ + ٢ = ٢ + ٢$ من $٢ + ٢$

أوجد (ق + هـ) (١) ، (ق - هـ) (١)

$\{ ١ , ١ \}$

(٢١) أوجد مجال الافتراض $ق = \frac{٢ - ٢}{٢ - ٢}$ من ٢ هـ (من) $٢ = ٢ + ٢$ هـ (من)

$\{ ٢ - ٢ , ٢ \}$

(٢٢) إذا كان $ق = ٢ - ٢ + ٢$ من ٢ هـ (من) $٢ = ٢ + ٢$ هـ (من) $٢ = ٢ + ٢$ هـ (من)

الدائرة ٢ المتارة في $(٢ - ٢)$ في $(٢ - ٢)$ لتصلح صوابه

(٢٣) أوجد الأسفار الحقيقية للافتراضات الحقيقية التالية:

(١) $ق = ٢ + ٢$ من ٢ هـ (من) $٢ = ٢ + ٢$ هـ (من)

(٢) $ق = ٢ - ٢$ من ٢ هـ (من) $٢ = ٢ - ٢$ هـ (من)

(٣) $ق = ٢ + ٢ + ٢$ من $٢ + ٢$ هـ (من) $٢ = ٢ + ٢$ هـ (من)

$\{ ٢ - ٢ , ٢ \}$ لا يوجد أسفار حقيقية





$$(٢٤) \text{ إذا كان } (س) = \sqrt[4]{س^2} \cdot س = س \cdot س = س^2 \text{ ، } (س) = \sqrt[4]{س} \text{ ، } (س) = \sqrt[4]{س}$$

$$\{ ١٣ ، ٢ \} \quad \text{أوجد مجال } (س) = ق(س) - ه(س)$$

$$\{ \text{ارشاد: مجال } (س) = \text{مجال } ق(س) \cap \text{مجال } ه(س) \}$$

$$(٢٥) \text{ إذا كان } (س) = \frac{1}{س} ، س \neq صفر ، ه(س) = \sqrt[4]{س} ، س \geq صفر$$

$$\text{أوجد مجال } (س) = ق(س) + ه(س) \quad \{ س < صفر \}$$

$$\{ \text{ارشاد: مجال } (س) = \text{مجال } ق(س) \cap \text{مجال } ه(س) \}$$

$$(٢٦) \text{ إذا كان } (س) = س + ٥ ، ه(س) = ٤س - ١$$

$$\text{أوجد مجال } (س) = ه(س) + ه(س) \quad \{ -١ - \frac{1}{٢} ، -\frac{1}{٢} \}$$

$$\{ \text{ارشاد: مجال } (س) = \text{مجال } ق(س) \cap \text{مجال } ه(س) \}$$

$$(٢٧) \text{ إذا كان } (س) = \frac{س^2}{١ - س} \text{ ، } (س) = ٥ \text{ في } (س) = -س$$

$$(٢٨) \text{ إذا كان } (س) = ٢س + س - ١ ، ه(س) = ٢ - ٢س$$

$$\text{أوجد: } (١) ق(س) + ه(س) \quad \{ -١ \}$$

$$(٢) ق(س) - ه(س) \quad \{ \frac{1}{٢} \}$$

$$(٣) ق(س) ه(س) \quad \{ ٦ \}$$

$$(٢٩) \text{ إذا كان القطران الأضلاع } (س) = ٥س - \frac{س^2}{١} ، \text{ والقطران المتكافئة}$$

$$\text{ك } (س) = ٤س - ٢ \text{ ، } ٢٨س + ٢٨ \text{ وكان القطران التام } (س) = د(س) \text{ ك } (س)$$

$$\text{أوجد: د } (٦) ، د(٢) \text{ وصنف الناتج إلى مكعب أو مضروب}$$

$$\{ \text{خاتمة: } ١٢١ ، \text{ مكعب } ١٢٤ \}$$





(٣٠) أوجد مجال الاقتران في (س) = $\frac{\sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ، من \neq عنصر

{ فرساند ، مجال الاقتران = مجال البسيط ، مجال المقام }

{ 1 = 2 ، صفر ، (صفر ، 100) }

(٣١) أوجد مجال الاقتران في (س) = $\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ، من \neq عنصر

(٣٢) أوجد مجال الاقتران في (س) = $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ من } 1 \text{ ، } 2 \text{ من } 2 \text{ ، } 3 \text{ من } 3 \text{ ، } 4 \text{ من } 4 \text{ ، } 5 \text{ من } 5 \text{ ، } 6 \text{ من } 6 \text{ ، } 7 \text{ من } 7 \text{ ، } 8 \text{ من } 8 \text{ ، } 9 \text{ من } 9 \text{ ، } 10 \text{ من } 10 \end{array} \right\}$

{ (1 ، 0) \cup (1 ، 1) }

(٣٣) أوجد مدى شكل من الاقترانات:

(١) في (س) = 1 ، المدى = { 1 }

(٢) في (س) = 2 - س ، المدى = 2 > 1

(المدى = -100 ، 100)

(٣٤) إذا كان في (س) = 1 + س ، هـ (س) = 1 - س

أوجد في (س) = 1 - س ، (س) = 1 - س ، (س) = 1 - س

(٣٥) ما قيمة العدد إذا كان في (س) = 1 - س ، 2 = س ، 3 = س

هـ (س) = 2 + س ، 3 = س ، 4 = س

(٣٦) ما فهم شكل من (س) = 1 + س ، هـ (س) = 1 - س ، 2 = س ، 3 = س

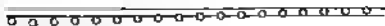
حيث في (س) = (2 + 1) من (2 + 1) - 1 = 1 - 1 = 0

في (س) = (2 - 1) من (2 + 1) + 1 = 2 + 1 = 3

{ 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 }

{ أوجد تسليوي العمليات المتطابقة وتكوين معادلات جبرية }





(٣٧) حل المعادلة $س^4 + ٢س^٢ - ٧س - ٨ = ١٢$ صف

$$\{-٢, ٢, ١, ٧\}$$

{ ارشاد : استعن بقطرية العوامل }

(٣٨) ادا طامت في سرعة الصوت في الهواء تعتمد على درجة حرارته، وحكم لري

في العلاقة التالية:

$$ع = ١٠٩٠ + ١,١٤ (ف - ٣٢)$$

حيث ع سرعة الهواء وتقاس ب قدم / ث

ف درجة حرارة الهواء وتقاس ب الدرجات فهرنهايت

احسب سرعة الصوت في الهواء بدرجة ٩٨ فهرنهايت.

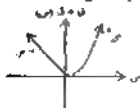
$$\{ ٢٦ و ١١٦٥ \text{ قدم / ث} \}$$

(٣٩) إذا كان الاقتران $ق(س)$ $س = ١ + ١س$ حيث $س$ حيث ١ ، $س$ ح وحلات

النقط $(٢, -٧)$ ، $(١, -٤)$ تقع على صحن

أوجد قيمة كل من ١ ، $س$ $\{ ٢, -١ \}$

(٤٠) مكتب قاعدة الاقتران $ق(س)$ المثل مستخدم بالشكل



{ ارشاد : منحنى }

(٤١) اعد تعريب الاقتران $ق(س)$ $س = ٢ - ٥$ وعكس مبدئياً على المنوى

نبيكازتي



(٤٧) اعتقد على الشكل

والذي يمثل متعني الاقربان

ق. (س) = | ا س + ب | لے ایجا د مینجی

$$\{ \tau = \tau_i \} \quad \omega, \tau$$



الارشاد: اعداد قریب و (ن) ہوگا: [ا، ب، پ، س، ۱]

1 - أجن - ٢٤، ص ١٤

(١٧) أوجد مجموعة الحل للمتباينة $2 > [x] + [y] > 3$

{ (7, 7) }

$$\{ \nabla = [1 + \alpha_{11}]; \alpha_{11} \in \mathbb{R} \}$$

(١٤) اذا كان في (س) = ٢ س + ٥ = حـ (م)

أوجد (١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧) (٨) (٩) (١٠) (١١) (١٢) (١٣) (١٤) (١٥) (١٦) (١٧) (١٨) (١٩) (٢٠) (٢١) (٢٢) (٢٣) (٢٤) (٢٥) (٢٦) (٢٧) (٢٨) (٢٩) (٣٠) (٣١) (٣٢) (٣٣) (٣٤) (٣٥) (٣٦) (٣٧) (٣٨) (٣٩) (٤٠) (٤١) (٤٢) (٤٣) (٤٤) (٤٥) (٤٦) (٤٧) (٤٨) (٤٩) (٥٠) (٥١) (٥٢) (٥٣) (٥٤) (٥٥) (٥٦) (٥٧) (٥٨) (٥٩) (٦٠) (٦١) (٦٢) (٦٣) (٦٤) (٦٥) (٦٦) (٦٧) (٦٨) (٦٩) (٧٠) (٧١) (٧٢) (٧٣) (٧٤) (٧٥) (٧٦) (٧٧) (٧٨) (٧٩) (٨٠) (٨١) (٨٢) (٨٣) (٨٤) (٨٥) (٨٦) (٨٧) (٨٨) (٨٩) (٩٠) (٩١) (٩٢) (٩٣) (٩٤) (٩٥) (٩٦) (٩٧) (٩٨) (٩٩) (١٠٠)

{ 4, 105}

(٤٥) أي من الاقتراحات التالية يمثل القانون واحداً لواحد.

$$1. (u_0) = u_0, \quad 2. (u_1) = u_1, \quad 3. (u_2) = u_2, \quad 4. (u_3) = u_3, \quad 5. (u_4) = u_4, \quad 6. (u_5) = u_5, \quad 7. (u_6) = u_6, \quad 8. (u_7) = u_7, \quad 9. (u_8) = u_8, \quad 10. (u_9) = u_9, \quad 11. (u_{10}) = u_{10}, \quad 12. (u_{11}) = u_{11}, \quad 13. (u_{12}) = u_{12}, \quad 14. (u_{13}) = u_{13}, \quad 15. (u_{14}) = u_{14}, \quad 16. (u_{15}) = u_{15}, \quad 17. (u_{16}) = u_{16}, \quad 18. (u_{17}) = u_{17}, \quad 19. (u_{18}) = u_{18}, \quad 20. (u_{19}) = u_{19}, \quad 21. (u_{20}) = u_{20}, \quad 22. (u_{21}) = u_{21}, \quad 23. (u_{22}) = u_{22}, \quad 24. (u_{23}) = u_{23}, \quad 25. (u_{24}) = u_{24}, \quad 26. (u_{25}) = u_{25}, \quad 27. (u_{26}) = u_{26}, \quad 28. (u_{27}) = u_{27}, \quad 29. (u_{28}) = u_{28}, \quad 30. (u_{29}) = u_{29}, \quad 31. (u_{30}) = u_{30}, \quad 32. (u_{31}) = u_{31}, \quad 33. (u_{32}) = u_{32}, \quad 34. (u_{33}) = u_{33}, \quad 35. (u_{34}) = u_{34}, \quad 36. (u_{35}) = u_{35}, \quad 37. (u_{36}) = u_{36}, \quad 38. (u_{37}) = u_{37}, \quad 39. (u_{38}) = u_{38}, \quad 40. (u_{39}) = u_{39}, \quad 41. (u_{40}) = u_{40}, \quad 42. (u_{41}) = u_{41}, \quad 43. (u_{42}) = u_{42}, \quad 44. (u_{43}) = u_{43}, \quad 45. (u_{44}) = u_{44}, \quad 46. (u_{45}) = u_{45}, \quad 47. (u_{46}) = u_{46}, \quad 48. (u_{47}) = u_{47}, \quad 49. (u_{48}) = u_{48}, \quad 50. (u_{49}) = u_{49}, \quad 51. (u_{50}) = u_{50}, \quad 52. (u_{51}) = u_{51}, \quad 53. (u_{52}) = u_{52}, \quad 54. (u_{53}) = u_{53}, \quad 55. (u_{54}) = u_{54}, \quad 56. (u_{55}) = u_{55}, \quad 57. (u_{56}) = u_{56}, \quad 58. (u_{57}) = u_{57}, \quad 59. (u_{58}) = u_{58}, \quad 60. (u_{59}) = u_{59}, \quad 61. (u_{60}) = u_{60}, \quad 62. (u_{61}) = u_{61}, \quad 63. (u_{62}) = u_{62}, \quad 64. (u_{63}) = u_{63}, \quad 65. (u_{64}) = u_{64}, \quad 66. (u_{65}) = u_{65}, \quad 67. (u_{66}) = u_{66}, \quad 68. (u_{67}) = u_{67}, \quad 69. (u_{68}) = u_{68}, \quad 70. (u_{69}) = u_{69}, \quad 71. (u_{70}) = u_{70}, \quad 72. (u_{71}) = u_{71}, \quad 73. (u_{72}) = u_{72}, \quad 74. (u_{73}) = u_{73}, \quad 75. (u_{74}) = u_{74}, \quad 76. (u_{75}) = u_{75}, \quad 77. (u_{76}) = u_{76}, \quad 78. (u_{77}) = u_{77}, \quad 79. (u_{78}) = u_{78}, \quad 80. (u_{79}) = u_{79}, \quad 81. (u_{80}) = u_{80}, \quad 82. (u_{81}) = u_{81}, \quad 83. (u_{82}) = u_{82}, \quad 84. (u_{83}) = u_{83}, \quad 85. (u_{84}) = u_{84}, \quad 86. (u_{85}) = u_{85}, \quad 87. (u_{86}) = u_{86}, \quad 88. (u_{87}) = u_{87}, \quad 89. (u_{88}) = u_{88}, \quad 90. (u_{89}) = u_{89}, \quad 91. (u_{90}) = u_{90}, \quad 92. (u_{91}) = u_{91}, \quad 93. (u_{92}) = u_{92}, \quad 94. (u_{93}) = u_{93}, \quad 95. (u_{94}) = u_{94}, \quad 96. (u_{95}) = u_{95}, \quad 97. (u_{96}) = u_{96}, \quad 98. (u_{97}) = u_{97}, \quad 99. (u_{98}) = u_{98}, \quad 100. (u_{99}) = u_{99}, \quad 101. (u_{100}) = u_{100}, \quad 102. (u_{101}) = u_{101}, \quad 103. (u_{102}) = u_{102}, \quad 104. (u_{103}) = u_{103}, \quad 105. (u_{104}) = u_{104}, \quad 106. (u_{105}) = u_{105}, \quad 107. (u_{106}) = u_{106}, \quad 108. (u_{107}) = u_{107}, \quad 109. (u_{108}) = u_{108}, \quad 110. (u_{109}) = u_{109}, \quad 111. (u_{110}) = u_{110}, \quad 112. (u_{111}) = u_{111}, \quad 113. (u_{112}) = u_{112}, \quad 114. (u_{113}) = u_{113}, \quad 115. (u_{114}) = u_{114}, \quad 116. (u_{115}) = u_{115}, \quad 117. (u_{116}) = u_{116}, \quad 118. (u_{117}) = u_{117}, \quad 119. (u_{118}) = u_{118}, \quad 120. (u_{119}) = u_{119}, \quad 121. (u_{120}) = u_{120}, \quad 122. (u_{121}) = u_{121}, \quad 123. (u_{122}) = u_{122}, \quad 124. (u_{123}) = u_{123}, \quad 125. (u_{124}) = u_{124}, \quad 126. (u_{125}) = u_{125}, \quad 127. (u_{126}) = u_{126}, \quad 128. (u_{127}) = u_{127}, \quad 129. (u_{128}) = u_{128}, \quad 130. (u_{129}) = u_{129}, \quad 131. (u_{130}) = u_{130}, \quad 132. (u_{131}) = u_{131}, \quad 133. (u_{132}) = u_{132}, \quad 134. (u_{133}) = u_{133}, \quad 135. (u_{134}) = u_{134}, \quad 136. (u_{135}) = u_{135}, \quad 137. (u_{136}) = u_{136}, \quad 138. (u_{137}) = u_{137}, \quad 139. (u_{138}) = u_{138}, \quad 140. (u_{139}) = u_{139}, \quad 141. (u_{140}) = u_{140}, \quad 142. (u_{141}) = u_{141}, \quad 143. (u_{142}) = u_{142}, \quad 144. (u_{143}) = u_{143}, \quad 145. (u_{144}) = u_{144}, \quad 146. (u_{145}) = u_{145}, \quad 147. (u_{146}) = u_{146}, \quad 148. (u_{147}) = u_{147}, \quad 149. (u_{148}) = u_{148}, \quad 150. (u_{149}) = u_{149}, \quad 151. (u_{150}) = u_{150}, \quad 152. (u_{151}) = u_{151}, \quad 153. (u_{152}) = u_{152}, \quad 154. (u_{153}) = u_{153}, \quad 155. (u_{154}) = u_{154}, \quad 156. (u_{155}) = u_{155}, \quad 157. (u_{156}) = u_{156}, \quad 158. (u_{157}) = u_{157}, \quad 159. (u_{158}) = u_{158}, \quad 160. (u_{159}) = u_{159}, \quad 161. (u_{160}) = u_{160}, \quad 162. (u_{161}) = u_{161}, \quad 163. (u_{162}) = u_{162}, \quad 164. (u_{163}) = u_{163}, \quad 165. (u_{164}) = u_{164}, \quad 166. (u_{165}) = u_{165}, \quad 167. (u_{166}) = u_{166}, \quad 168. (u_{167}) = u_{167}, \quad 169. (u_{168}) = u_{168}, \quad 170. (u_{169}) = u_{169}, \quad 171. (u_{170}) = u_{170}, \quad 172. (u_{171}) = u_{171}, \quad 173. (u_{172}) = u_{172}, \quad 174. (u_{173}) = u_{173}, \quad 175. (u_{174}) = u_{174}, \quad 176. (u_{175}) = u_{175}, \quad 177. (u_{176}) = u_{176}, \quad 178. (u_{177}) = u_{177}, \quad 179. (u_{178}) = u_{178}, \quad 180. (u_{179}) = u_{179}, \quad 181. (u_{180}) = u_{180}, \quad 182. (u_{181}) = u_{181}, \quad 183. (u_{182}) = u_{182}, \quad 184. (u_{183}) = u_{183}, \quad 185. (u_{184}) = u_{184}, \quad 186. (u_{185}) = u_{185}, \quad 187. (u_{186}) = u_{186}, \quad 188. (u_{187}) = u_{187}, \quad 189. (u_{188}) = u_{188}, \quad 190. (u_{189}) = u_{189}, \quad 191. (u_{190}) = u_{190}, \quad 192. (u_{191}) = u_{191}, \quad 193. (u_{192}) = u_{192}, \quad 194. (u_{193}) = u_{193}, \quad 195. (u_{194}) = u_{194}, \quad 196. (u_{195}) = u_{195}, \quad 197. (u_{196}) = u_{196}, \quad 198. (u_{197}) = u_{197}, \quad 199. (u_{198}) = u_{198}, \quad 200. (u_{199}) = u_{199}, \quad 201. (u_{200}) = u_{200}, \quad 202. (u_{201}) = u_{201}, \quad 203. (u_{202}) = u_{202}, \quad 204. (u_{203}) = u_{203}, \quad 205. (u_{204}) = u_{204}, \quad 206. (u_{205}) = u_{205}, \quad 207. (u_{206}) = u_{206}, \quad 208. (u_{207}) = u_{207}, \quad 209. (u_{208}) = u_{208}, \quad 210. (u_{209}) = u_{209}, \quad 211. (u_{2$$

{ الأهل والذات }

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 5 \text{ إلى } 1 \\ \text{من } 1 \text{ إلى } 5 \\ \text{من } 5 \text{ إلى } 1 \end{array} \right\} = 12 \text{ مكان في (من) } =$$

(أ) وجد القيمة $Q(4) = 0.0001$ ، $Q(5) = 0.0001$ ، $Q(-) = 0.0001$ ، $Q(\frac{1}{r}) = 0.0001$ ، $Q(\frac{1}{r}) = 0.0001$ ، $Q(-) = 0.0001$.

$$\left\{ \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, 0 \right\}$$



(٤٧) أعد تعريف كلاً من الافتراضات التالية:

$$(1) \text{ ق (من) } = |x - y| + 1$$

$$(2) \text{ ق (من) } = |x - y| + \frac{1}{4} \text{ ، في الفترة } [1, 2] \text{ ، } \frac{1}{4} \text{ ، } \frac{1}{2} \text{ ، } \frac{3}{4} \text{ ، } 1$$

{ ارشاد: انصوب، نقطة البداية في الافتراض التالي، أجعله مساوياً للصفر }

$$(48) \text{ أوجد خارج قسمة ق (من) } = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 1 \text{ من } 13x - 12$$

$$\text{ على ه (من) } = 2x - 7$$

$$(49) \text{ ما باقي قسمة ق (من) } = 2x^3 - 10x^2 + 8x - 7 \text{ من } 3x^3 - 11x^2 + 11x - 1$$

$$\text{ على ه (من) } = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$$

{ ارشاد: قسمة طويلة }

$$(50) \text{ ما باقي قسمة ق (من) } = 4x^3 - 7x^2 + 8x - 1 \text{ من } 8x^3 + 8x^2 - 1$$

$$\text{ على ه (من) } = 8x^3 - 1$$

{ ارشاد: ق (48) }

$$(51) \text{ إذا كان ق (من) } = \frac{1 - x}{1 + x} \text{ ، ه (من) } = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$$

$$\text{ ما مجال الافتراض } \frac{x}{x^2 - 1} \text{ (من) } \{ -1, 0, 1 \}$$

$$(52) \text{ ما قيمة } x \text{ التي تجعل ق (من) } = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 1 \text{ يقبل القسمة على}$$

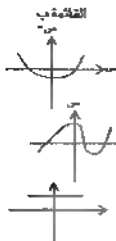
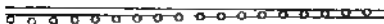
$$\text{ ه (من) } = 2x - 7 \text{ ، } \{ 1 \}$$

$$(53) \text{ ما درجة كثير الحدود ق (من) } = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 1 \text{ (من) } = 2x - 7$$

{ اخلصه }

{ ارشاد: أوجد حاصل ضرب 14 }





(٥١) القائمة أ

ق (س) = س^٢ - ٤ س + ٢

هـ (س) = جـ

لـ (س) = س^٢ - ٤ س + ٢

و مطلوب: صل بين القائمة الاقتران

من القائمة أ مع متناه

من القائمة ب

(٥٥) إذا كان ق (س) = س^٢ + ٢ س + ١ من ٦

هـ (س) = س^٢ - ٤ س + ٢

أوجد ناتج كل من : ق + هـ (س) ، ق - هـ (س) ، ق * هـ (س)

(٥٦) رُسم مربع طول ضلعه س داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه على محيط

الدائرة. اكتتب الاقتران الذي يدل على المساحة المحصورة بين الدائرة والمربع.

(٥٧) إذا كان هـ (س) = س^٢ - ٢ س + ٢ من ٢ س + ٢ س - ١ من ٢ =

{ ٧ }

أوجد قيمة أ.

(٥٨) ب عرض مساحة بدالة س إذا كانت مساحتها م (س) = ٢ س^٢ + ٢٩ س + ٦٠

وطولها هـ (س) = ٢ س + ٥

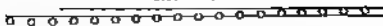
{ ارشاد: عملية قسمة طويلة أو تركيبة }

(٥٩) اكتتب قاعدة الاقتران كثير الحدود من الدرجة الثانية التي من عوامله س (١

(س + ٢) ، (س - ٤)

{ ارشاد: حاصل ضرب العوامل أو نظرية الباقي }

الاقتربات التجريبية



(٦٠) يراد عمل عتبة طويّات للأطفال مفتوحة مساحتها ١٠٨ سم^٢ من لوح مربع من الكرتون طول ضلعه ١٢ سم وذلك بقطع مربعات متساوية من أركانها الأربعة طول ضلع كل منها من سم وبقي الأجزاء البارزة الأعلى يكتب في الشكل.



أوجد أبعاد المربعة (طولها وعرضها وأقطارها)

$$\{ 2, 6, 6 \}$$

(٦١) حلل الاقترانات التالية الى عواملها الأولية.

$$(١) \text{ ق.م.س } = ٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧$$

$$(٢) \text{ ق.م.س } = ٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧$$

$$(٣) \text{ ق.م.س } = ٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧$$

$$(٤) \text{ ق.م.س } = ٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧$$

(٦٢) وجد سائب عمل ليجمع قطع المثلثات أن القتران دج و (س) = س^٢ - س^٢ - ١٧ من حيث من عدد القطع المربعة، فليكن دج للحل في يوم من ١٥ دينار ما عدد القطع الذي يجمعها؟

(٦٣) إذا كان س = س - ١ عمل من عوامل الاقتران في (س) = ٢ - س^٢ - ٣ - س - ٥ فما قيمة ؟

(٦٤) مستطيل مساحته تعادل بالاقتران ق(س) = س^٢ + ١١ - س^٢ + ١٧ - س^٢ - ٥ سم^٢ وعرضه يمثل بالاقتران س^٢ + س^٢ - ٦ سم اكتب الاقتران الذي يمثل طوله
{ ارشد : مساحة المستطيل = الطول × العرض }





(٦٤) أي من الاقتربات التالية بسببه ؟ وإلغاه ؟

$$(١) \text{ قرب (من) } = \frac{0}{1} = 0$$

$$(٢) \text{ قرب (من) } = \frac{1}{1} = 1$$

$$(٣) \text{ قرب (من) } = \frac{1}{1} = 1$$

$$(٤) \text{ قرب (من) } = \frac{1}{1} = 1$$

{ الأول والثاني }

(٦٥) بسط الاقتربات التمهيدية التالية:

$$(١) \frac{2 + \sqrt{3} - 1}{1 - \sqrt{3}}$$

$$(٢) \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$(١) \frac{1 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$(٢) \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

(٦٦) عدنان مجموعهما يساوي ٥ وحاصل العدد الثاني ٢ مربع العدد الأول

يساوي ١٢ فما العددين ؟

{ ٣ ، ٢ }

(٦٨) و حد من الاقتربات التالية: هم (من) = ٣ ، هم (من) = ٣ - ٢

هم (من) = ٣ + ٢ ، هم (من) = ٢ - ٣

(٦٩) من الشكل المجاور إذا كان طول أ ب = طول ب ج = من م، وانظرت أ ب ج



لأنم الزاوية ج ب م

انقلب الاقتران التي يدل على الفرق

بين مساحة الدائرة ومساحة المثلث

$$\left\{ \frac{10}{12} - \frac{1}{2} \right\}$$

{ ارشد أ ج يجب أن يكون قطراً ؟ لا ؟ }



(٧٠) ما قيم $(س, ح)$ التي تحقق للمساواة $(س, ح) = (٧ - س - ٢, ١)$

$$\{ ١ \pm ٢, ٢ \}$$

وللمساواة

$$(س, ح) = (س + ٢, س + ٢) = (س + ١٦, ١ \pm ٢)$$

(٧١) اكتب العلاقة التي قاعدتها $ع = \{ (س, ح) : س = ٠, س = ٣ \}$ عكس الشكل مجموعة من الأزواج المرتبة ثم مكملها بيانياً على المستوى الديكارتي.

(٧٢) اكتب خمسة أزواج مرتبة (لنحسب) تنتمي للعلاقة $ع = (س, ح) : س = ١ + ٢, س = ٣ \}$

(٧٣) يُنتج مصنع أبواباً من الخشب الفاخر مستطيلة الشكل ذا مقاييس مقبولة بحيث يتكون طول شكل منها $(س)$ مكلي عرضه $(ح)$ ، فإذا أنتج المصنع أبواباً عرضهها بالسنتيمترات ٨٥، ٩٠، ٩٥، ١٠٠، ١٠٥ سم اكتب قاعدا العلاقة التي تربط الطول بالعرض ثم أوجد مجالها ومداها

$$\left\{ \begin{array}{l} (س, ح) : س = ٢, ح = ٨٥, ٩٠, ٩٥, ١٠٠, ١٠٥ \\ \text{مداها } ١٧٠, ١٨٠, ١٩٠, ٢٠٠, ٢١٠ \end{array} \right.$$

(٧٤) أي من العلاقات التالية افتراض مع ذكر البيان

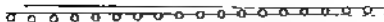
$$ع = \{ (-١, ٢), (٢, ١), (٣, ١), (٣, ٧), (٤, ٠) \}$$

$$ع = \{ (-١, ٢), (١, -٢), (٠, ١), (٣, ١), (٤, ١) \}$$

(٧٥) أراد شخص زراعة حوض مستطيل طوله ١٠ متر وعرضه ٩ متر بالزهور ونورود وإحاطته بممر منتظم العرض، اكتب الافتراض الذي يربط عرض الممر $(س)$ بمتر ومساحته $ق(س)$

$$\{ \text{أرضاء : مساحة الممر} = \text{مساحة الحوض} + \text{الممر} \quad \text{مساحة الحوض} \}$$

$$ق(س) = ٤س + ٢٢س$$



(١٠٥) يحتوي خزان ٦٢٥ م^٣ ماء، ويتناقص الماء كل يوم بمقدار ٢٥ متر مكعب

عن اليوم الذي قبله حسب الجدول:

كمية الماء المتبقية في الخزان م^٣ في نهاية اليوم:

الأول: $625 - 1 \times 25 = 600$ م^٣

الثاني: $625 - 2 \times 25 = 575$ م^٣

الثالث: $625 - 3 \times 25 = 550$ م^٣

وهكذا يستمر على نفس النمط

والآن أجب عما يلي:

(١) استنبط قاعدة الاقتران التي تربط كمية الماء المتبقية في اسطوان بعد من

{ ٦٢٥ - ٢٥ من }

يوم

(٢) بعد كم يوم يبقى في الخزان ٢٧٥ م^٣ من الماء؟ { ١٤ يوم }

(٣) بعد كم يوم ينفذ الماء من الخزان فيصبح فارغاً؟ { ٢٥ يوماً }

(١٠٦) تم ترتيب أعداد من التتابع في الشكل وفق نمط معين كما يلي:



والآن أجب عما يلي:

(١) استنبط قاعدة النمط (الاقتران) { (ن) = ٣ + ٢ }

{ ارشاد ايضاً بالجدول المرحلة العدد

١ ← ٦ = ٢ + ١

٢ ← ٩ = ٢ + ٢

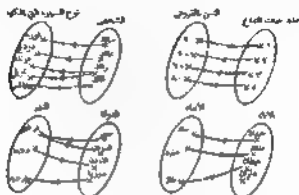
٣ ← ١٢ = ٢ + ٣

وهكذا...



(٢) إن استمر النمط، وبهذا الشكل تكتم عدد أعواد اللقاب الثلاثة لعمل
مرحلة الماشية؟ {ق} $(10) = 2 + 10 = 2 + 23$ عود

(١٠٧) مبر العلاقة من الاقتران اعتماداً على مضططاتها المهيمة لثالثية



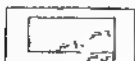
(١٠٨) لتشجيع زراعة الأسمدة في الأردن تقرر وزارة الزراعة حوافز شخصية
للمزارعين، إذ قدمت ٢٠ دينار مقابل كل دونم يزرع أسمدة (أكمل الجدول
التالي)

العدد	١	٢	٣	٤	٥
المبلغ المدفوع	١	٢	٣	٤	٥

لم اكتمب قائمة النمط أو الاقتران في (س) الذي يمثل قيمة الحوافز.

{ق} (س) = ٢٠ من

(١٠٩) أراد شطفي زراعة حوض بالزهود على شكل مستطيل طوله ١٠ أمتار
وعرضه ٦ أمتار وأحيطته بممر منتظم مكعباً في الشكل.



إد كان عرض الممر من متر،
اكتمب الاقتران الذي يمثل مساحته
ثم أوجد مساحته مضاعفاً

عرضه يساوي ١ متر {ق} (س) = $(10 + 6) = 16$ من

{إرشاد: مساحة للممر = مساحة الحوض والممر = مساحة الحوض}



(١١) أوجد قاعدة لكل من العلاقات التي تربط بين المتغيرين x و y و

فيمد لنا أصبحت هذه العلاقة اقتران أم ما زالت علاقة

$$\{x = y^2\} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ \hline 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 \end{array}$$

$$\{x = |y|\} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

$$\{x = y^2 - 1\} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 3 & 8 & 15 & 24 & 35 \\ \hline 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 \end{array}$$

$$\{x = y^2 - 1\} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 \\ \hline 21 & 26 & 31 & 36 & 41 & 46 \end{array}$$

وحددنا الاقترانات

(١١١) أي من الاقترانات التالية غير خطي

$$Q (x) = x + 2 \quad , \quad R (x) = \sqrt{x} - 1$$

$$L (x) = \frac{1}{x} - 5 \quad , \quad M (x) = \frac{x}{x-1} - 2 \quad (L(x))$$

(١١٢) في إحدى الفعاليات المخصصة لأقامة الأهرام، إذا كانت تكلفة الشطرنج

المدعو ٣ دينار وكان مدير الفعالية يتقاضى مبلغ ٢٥٠ ديناراً بدل خدماته بمسروفات ثابتة، ما تكاليف الفعالية إذا كان عدد المدعوين ١٠ شخص، ٢٠٠ شخص؟

$$\{Q (x) = 2x + 250 \text{ حتى } x \text{ عدد المدعوين}\}$$

(١١٣) إذا كان $Q(x) = 2x - 2$

$$\text{أوجد } Q(1), Q(\sqrt{x}), Q(0), Q\left(\frac{1}{x}\right)$$



(١١٤) تنتج شركة مصانع الاسمنت العربية من طن يومياً، فإذا كانت تكلفة طن الواحد ٧٥ دينار، وتنتج الشركة مصاريح أخرى ثابتة مقدارها ٥ دينار في اليوم، فكتب الاقتران الذي يربط تكلفتهم الانتاج بمقدار الاصل في اليوم الواحد.

$$\{ ق (س) = ٧٥ س + ٥ \}$$

(١١٥) أوجد ميل كل من الاقترانات (الاقتران الخطي يمثل بمسقطهم بالهندسة التحليلية)

$$ق (س) = ١ س + ٩$$

$$ل (س) = ٧ - ٤ س$$

$$هـ (س) = ٨ + ٥ س$$

(الرسالة اجعل الاقتران على صورة $س = م س + ج$ حيث $م$ الميل و $ج$ محاسن $س$)

(١١٦) كنم درجة كل من الاقترانات التالية إلى مكاتب من كثيرات الحدود:

$$ق (س) = \sqrt[3]{س} ، ق (س) = س (س - ١) ، ق (س) = \frac{١}{س}$$

$$ل (س) = \frac{١}{س} ، ق (س) = س - ٣ ، ق (س) = س (١ + ٤ س - ٥ س^٢)$$

$$ل (س) = \frac{١}{٢} س + ٥ س ، ق (س) = \sqrt[٣]{س} ، س + ٥$$

(١١٧) وجد صاحب مصنع لتلاجات أن التكلفة الكلية للانتاج الاسبرجي

لتلاجات عددها (س) تقدر بالاقتران $ك (س) = ٣ س - ٤ س^٢ - ٧ س + ١٠$

فإذا بيعت التلاجة الواحدة بمبلغ ٥٠٠ دينار، جد القدر الربح لبيع التلاجات.

(١١٨) ملك مقهى كل من الاقترانات التالية يمثلها على المستوى الديكارتي وكلاً لوحده:

$$ق (س) = ٥ ، ق (س) = ٣ س - ٤ ، ق (س) = س^٢ ، ٤ س + ٢$$

(١٢٦) يمثل الاقتراحات الخمسة التالية إلى أسفل صورة ممكنة:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

12 ق (س) = $\frac{2 \times 2 \times 2}{2}$ مس

$$\frac{|u_p| \Delta \tau}{1 - \alpha \Delta \tau} = (u_p)_{n+1}$$

(۱۷۷) حل: $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

(۱۲۸) (۱۵) مکانی (ف) = ص^۱ - ۴ ، ه (ص) = ص^۲ + ۲ ص^۱ - ۴

آوجہ (۱) - (۲) - (۳)

(۱۳۹) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

على حد (م) * من + ا يساوي ٦ لها قيمة ٩

(۱۳۰) (۱۲) کتابی (ص) ۴۰ ص ۲ - ۱ ص ۱ - ۱

اوجده (٠) ، ق (١) ، ق (٢) ، ق (٣) ، ق (د) ، ق (س)

(١٣٩) حاشي (الافتقار في غير) = ١ - من حيث ٣ حذ^١ الى حواشي الأولية عدد ١

$$1.25 \times 10^{-3} \text{ mol/L} \times 100 \text{ mL} = 0.125 \text{ mmol}$$

{ ارشادہ احسن بالقصص الطويلة } { اسٹوریٹس }

(۱۳۲) حل المسألة من ۱ = ۱ - ۱

والصالحين

$$\{ \cdot, \cdot \} \quad \text{من } 1 \text{ تا } 10 \text{ و } 11 \text{ تا } 20 \text{ و } 21 \text{ تا } 30 \text{ و } 31 \text{ تا } 40 \text{ و } 41 \text{ تا } 50 \text{ و } 51 \text{ تا } 60 \text{ و } 61 \text{ تا } 70 \text{ و } 71 \text{ تا } 80 \text{ و } 81 \text{ تا } 90 \text{ و } 91 \text{ تا } 100$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 \text{ من } > \text{ صفر} \\ \text{من } 2 \text{ من } \geq \text{ صفر} \\ \text{من } 3 \text{ من } < \text{ صفر} \end{array} \right\} = \text{كلان في (من)} = (133)$$

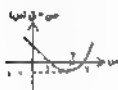
أولاد ق، (- ٥) ، ق (مطهر) ، ق (٥)



(١٣٤) إذا كان:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{s} - 1 &= (s) \quad \text{لوجد } s^1 \\ (2) \quad \frac{2 + s^2}{s} &= (s) \quad \text{لوجد } s^2 \end{aligned}$$

(١٣٥) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحني ق (س) = s^2 من s^1 ب من s^2 ب



ونجب عن الأسئلة التالية:

(١) ما اسم منحني ق (س) وما إحداثيات رأسه؟

(٢) ما محور التماثل التوجيهية للرأفة ثلاثية؟

(٣) اكتب قاعدة ق (س)

(١٣٦) إذا كان ق (س) = s^2 - s - ٢ لوجد قيمة ق (٢ = ٣) بدلالة ١

(١٣٧) إذا كان ق (س) = s^2 - ٢ - ١ هـ (س) = ٢ - ١ اجب عما يلي:

(١) هل ق (٢) = هـ (٢) { نعم }

(٢) هل ق (س) = هـ (س) { لا }

ملاحظة: يعني ذلك؟

(١٣٨) إذا كان ق (س) = s^2 - ١ ، ق (س) = s^2 - ١

ما درجة كل من الاشتراطات:

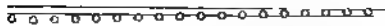
(ق + س) ، (ق - س) ، (ق * س) ، (ق / س)

(١٣٩) اعتماداً على الشكل المجاور أوجد مساحة



الجزء المظلل بدلالة س

عندما س = ٢ سم أوجد مساحته بالسم^٢



اكتب قاعدة كل من الافتراضات:

$$(1) \text{ ق} + \text{هـ} = (\text{س}) \quad (2) \text{ ق} - \text{هـ} = (\text{س})$$

$$(3) \text{ ق} - \text{هـ} = (\text{س})$$

(١٤٧) يوجد مجال لكل من الافتراضات:

$$(1) \text{ ق} = (\text{س}) = \sqrt{1 - \text{س}} \quad (-1, 1)$$

$$(2) \text{ ق} = (\text{س}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{س}}} \quad (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

(١٤٨) يوجد مجموعة حلول للمعادلة $\text{س}^2 - 9\text{س} + 14 = 0$ س = 18 = صفر

(١٤٩) أوجد العامل المشترك الأعظم (خ. م. أ) للمقدارين الجبريين

$$\text{س}^2 - 2\text{س} - 15 \quad \text{س}^2 - 2\text{س} - 15$$

{ ارشاد: استخدم نظرية المتوابع والتحليل الى العوامل أيضاً }

(١٥٠) اكتب قاعدة الافتراض ق = (س) الذي يقسم كلاً من الافتراضين:

$$\text{هـ} = (\text{س}) = 1 - \text{س}^2 \quad \text{س}^2 + 3\text{س} - 10$$

$$\text{ل} = (\text{س}) = 4\text{س}^2 + 3\text{س} - 1 \quad \text{س}^2 - 3\text{س} - 10 \text{ هـ} = \text{ق}$$

{ ارشاد: ق = (س) = المضاعف المشترك الأصغر للافتراضين }

(١٥١) إذا كان ق = (س) = 10، وهر منحناه بالمتنئين (٢، ١٦)،

$$\text{ب} = \left(\frac{1}{\text{س}}, \text{س}\right) \text{ أوجد قيمة } \text{ب}$$

{ ارشاد: أوجد قيمة لكل أولاً }

$$(١٥٢) \text{ إذا كان ق} = (\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}, \text{ س} \neq \text{صفر}$$

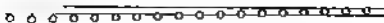
$$\text{هـ} = (\text{س}) = 5\text{س}^2 + 8$$

$$\text{أوجد ق} = \text{هـ} = (1) \quad \text{هـ} = \text{ق} = (1) \quad \left\{ \frac{1}{12}, 12 \right\}$$



المتباينات والبرمجة الخطية

Inequalities and Linear
Programming



١٩) المتباينة Inequality

المتباينة جملة مفتوحة تحتوي رمزاً أو أكثر من رموز علاقه الترتيب التاليه

$<$ ولتقرأ أصغر من

\leq ولتقرأ أصغر من أو يساوي

$>$ ولتقرأ أكبر من

\geq ولتقرأ أكبر من أو يساوي

مثال: $٢ < ٣$ (حيث ٣ عدد حقيقي)

وبكذلك: $٩ \leq ٩$ (حيث ٩ من عددان حقيقيان)

ومن المتباينات معناه إيجاد قيم المتغير أو المتغيرات لتصبح هذه الجملة صواباً
في حقل الأعداد الحقيقية حيث مجموعة التمييز دائماً هي ح مجموعة الأعداد
الحقيقية

والمتباينات تخضع في حلولها لقانون التثاقل (مرُ ملاحظاً) والذي مفاده لأي
عددين حقيقيين ٩ ، ٩ من دائماً أن يكون:

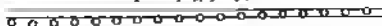
$٩ > ٩$ أو $٩ = ٩$ أو $٩ < ٩$ من

والجدير بالذكر أن لكل متباينة معادلة مرافقة كما يلي:

للمتباينة $٩ < ٩$ معادلة مرافقة هي $٩ \geq ٩$

للمتباينة $٩ > ٩$ معادلة مرافقة هي $٩ \leq ٩$ وبعكس

وقبل البدء بإيجاد مجموعات الحلول للمتباينات، نعيد ملاحظة وتوسيع خواص
المتباينات كما مروت في حقل الأعداد الحقيقية بإيجاز شديد، فنقول بوضوح على أي
علاقه ترهيبية (ملاحظة) بين العددين الحقيقيين ٩ ، ٩ من ما يلي من المتباينات الرياضية



(١) إذا كان $x \geq y$ فإن $x + 1 \geq y + 1$ لكل x, y

مثال: إذا كان $7 \geq 10$ فإن $8 \geq 11$ لأن $8 = 7 + 1$ و $11 = 10 + 1$ (جميع)

(٢) إذا كان $x > y$ فإن $x - 1 > y - 1$ لكل x, y

مثال: إذا كان $7 > 10$ فإن $6 > 9$ لأن $6 = 7 - 1$ و $9 = 10 - 1$ (طرح)

(٣) إذا كان $x \geq y$ فإن $cx \geq cy$ حيث $c \geq 0$ لكل x, y, c

مثال: إذا كان $7 \geq 10$ فإن $20 \geq 14$ لأن $20 = 7 \times 2$ و $14 = 10 \times 2$ (ضرب $c = 2$)

(٤) إذا كان $x \geq y$ فإن $-x \leq -y$ حيث x, y لكل x, y

مثال: إذا كان $7 \geq 10$ فإن $-7 \leq -10$ لأن $-7 = -7$ و $-10 = -10$ (ضرب $c = -1$)

حيث $c < 0$

نلاحظ عكس إشارة الترتيب أو الترتيب

من \geq إلى \leq

(٥) إذا كان $x \geq y$ وكان $a \geq 0$ فإن $ax \geq ay$ (موجباً)

أو $x \leq y$ وكان $a \leq 0$ فإن $ax \geq ay$ (سالباً)

فإن $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$ (مقلوب المتطرفين الموجبين معاً أو السالبين معاً)

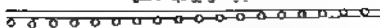
مثال: إذا كان $2 \leq 4$ فإن $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$

وإذا كان $-2 \geq -4$ فإن $\frac{1}{-2} \leq \frac{1}{-4}$

وهذا هو ما يوضحه جدول الأعداد الحقيقية كما هو في الشكل التالي



المتباينات والبرمجة الخطية



ولنبداً

(٩- ٢) حل نظام من المتباينات بتغيير واحد ومن درجات عدد

أولاً، حل المتباينات من الدرجة الأولى:

مثال،

حل المتباينة من $12 > 4x$

$$12 > 4x$$

$$3 > x$$

مجموعة الحل = $\{x, x < 3\}$

وكافئته من $(-\infty, 3)$



وعلى خط الأعداد

مع ملاحظة أن الدائرة المصغرة حول العدد ٨ وفير للظلال تعني أن العدد ٨ لا ينتمي إلى الحل.

هذا ويمكن أن نرابط المتباينات مع بعضها البعض بالربط (أو ، و)

لتكون متباينة مركبة كما في المثالين:

مثال (١)،

هذا كان الربط هو (أو) فإن مجموعة الحل تنقسم عددياً للمتباعدة

المركبة هي $x < 3$ و $x > 5$ ، حيث

أوجد مجموعة الحل للمتباينة المركبة:

$$x < 3 \text{ و } x > 5 \quad (\text{أو}) \quad x < 3 \text{ و } x > 5$$





الحل

$$\begin{array}{lcl} 2 > 5 & \text{من } 5 & 2 < 2 + 5 \\ 5 & - & 2 - 2 \\ \hline 4 > 3 & \text{من } 3 & 5 < 5 \\ 2 > 2 & \text{من } 2 & 1 < 1 \end{array}$$

مجموعة الحل: $1 < 2$ أو $2 > 5$



ونظراً لأن: $2 > 5$ و $1 < 2$ و $5 < 5$ و $4 > 3$

مثال (٢)

وإذا كان الرابط هو (و) فإن مجموعة الحل مشتركة عديدة لمتباينة المركبة هي $1 < 2$ و $5 < 5$

حيث $2 > 5$ و $1 < 2$ و $5 < 5$ و $4 > 3$

فـ ، $2 > 5$ و $1 < 2$ و $5 < 5$ و $4 > 3$

أوجد مجموعة الحل للمتباينة المركبة:

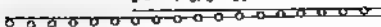
$$2 > 5 \text{ و } 1 < 2 \text{ و } 5 < 5 \text{ و } 4 > 3$$

يمكن كتابة المتباينة المركبة وكتابتها واحدة هكذا (إذا كان الرابط و)

ونظراً لأن: $2 > 5$ و $1 < 2$ و $5 < 5$ و $4 > 3$

$$2 > 5 \text{ و } 1 < 2 \text{ و } 5 < 5 \text{ و } 4 > 3$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ \hline \frac{2}{2} & > & \frac{2}{2} > 1 \\ & & 2 > 2 \\ & & 1 > 1 \end{array}$$



مجموعة الحل: $\{x \mid x > 1 \text{ و } x < \frac{4}{3}\}$

على خط الأعداد

ونكتبه $(1, \frac{4}{3})$

مثال تحليلي:

إذا كان طولا ضلعين في مثلث هما 6 سم، 8 سم فما طول الضلع الثالث؟

نفرض أن طول الضلع الثالث = x سم



(وحيث أن مجموع طولي ضلعين في مثلث

أكبر من طول الضلع الثالث) (نظرية)

فإن:

$$6 + 8 < x \quad \text{و} \quad 6 + x < 8 \quad \text{و} \quad 8 + x < 6$$

ولكننا بأخذ المتباينين الأول والثاني للشكل متباينة مركبة:

هكذا: $6 + 8 < x$ (و) $6 + x < 8$ (أما $8 + x < 6$ فلنستقبلها هنا نكون

$8 < 6$ بالأصل ونتج أعداد متباينة بعد

حذف الأطوال ليست سالبة إطلاقاً)

$$6 + 8 < x \quad \text{و} \quad 6 + x < 8$$

$$\begin{array}{r} 6 + 8 < x \\ 6 + x < 8 \\ \hline \end{array}$$

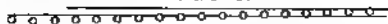
$$x < 2$$

هذا ممكن أن يقال بأن:

$$x > 2 \quad \text{و} \quad x > 12$$

مجموعة الحل: $\{x \mid x > 2 \text{ و } x > 12\}$

المتباينات والبرهان بالخطية



وعلى حصة الأعداد



وكيفية

والنتيجة أنه يمكن رسم مثلث شروط أن يتعبر الضلع الثالث فيه بين
الموازين 2 سم ، 14 سم فتكون وليس لهما.

مثال:

حل: المتباينة - $18 = (س - 4) 2$ فك الأقواس

$$18 \geq 2 + 12$$

$$\frac{12 + 2}{2} \geq \frac{18}{2}$$

$$س \geq 10$$

الحل كالمجموعة: $\{س | س \geq 10\}$



وعلى حصة الأعداد

وكيفية $(- \infty, 10]$

مثال:

$$\text{حل: المتباينة } \frac{2 - س}{1} - \frac{4}{12} \leq \frac{2 - س}{1} - \frac{2 - س}{12}$$

يجب التخلص من الكسور وذلك بضرب طرفي المتباينة والمقام 12 معكدة :

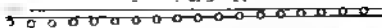
$$12 \left(\frac{2 - س}{1} - \frac{4}{12} \right) \leq 12 \left(\frac{2 - س}{1} - \frac{2 - س}{12} \right)$$

$$24 - 12س - 4 \leq 24 - 12س - 2 + 2س$$

$$20 - 12س \leq 22 - 10س$$



المتباينات والتبرصجة الخطية



ويقرر نه غيرات على الطرف الأيمن والأعداد على الطرف الأيسر هكذا

$$x \text{ من } 9 \text{ من } 10 \text{ من } 20 + 7 \leq 28$$

11 من 1 من 6 مع تعبير إشارة التباين

$$x \geq 6 \quad \text{مجموعة الحل} = \{x \text{ من } 6 - \infty\}$$



على خط الأعداد

$$\text{وسكينة } (-\infty, 6]$$

ثانياً: حل المتباينات من الدرجة الثانية

والحل يتم في هذا اليد بالإشارات الموجبة والسالبة هكذا

مثال:

$$\text{حل المتباينة } x^2 - 4 > 0$$

نجد إشارة الطرف الأيمن بعد تحليله إلى عوامله الأولية (اختراعات أولية) هكذا

$$(x - 2)(x + 2) > 0$$

نجد إشارة من

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{منفر}$$

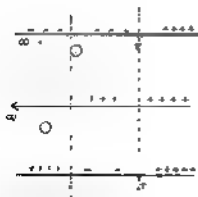
$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \text{منفر}$$

إشارة من

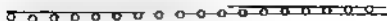
$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{منفر}$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{منفر}$$

ضرب الإشارات



المقاييس والبرسجة الخطية



ويمكن الوصول إلى هذه النتيجة كما يلي:

بين الجدرين الإشارة عكس الإشارة من



وبما أن المطلوب أن قيمة المتباينة > صفر أي سالبة

فإن الحل للمتباينة من $x < -4$ و $x > 2$ (قيم سالبة)

الحل ك مجموعة (من $x > 2$)

وكمجموعة (من $x < -4$)



مثال

أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$x^2 - 2x < 1$$

$$x^2 - 2x - 1 < 0$$

من $x^2 - 2x - 1 < 0$ نحصل على $x < -1$ و $x > 1$

(من $x^2 - 2x - 1 < 0$)

والحل يتم بالإشارات أيضاً هكذا



الإشارة من $x < -1$

وصورة $x < -1$

إشارة من $x > 1$

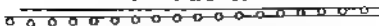
وصورة $x > 1$

إشارة من $x < -1$

ضرب الإشارات



المتباينات والقيم موجبة الخطية



مجموعة الحلول للمتباينة من $x < 2$ صفر (القيم موجبة)

الحل كمجموعات (من: $x > -1$ ، $x < 2$)

$$\text{مكتوب: } (x > -1) \cup (x < 2) = (-1, 2)$$

وعلى جهة الأعداد

مثال:

من المتباينة من $x + 1 \leq 2$ صفر

وحيث أن الطرف الأيمن لا يحل إلا بواسطة اكتمال المربع أو الضرب هكذا لأن

$$\text{مبدوء في } x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

من $x + 1 \leq 2$

وبإضافة مربع نصف معامل المتغير من الطرفين هكذا يلي:

$$x^2 - 4x + 4 \leq 0 \Rightarrow (x-2)^2 \leq 0$$

أي أن (من) $x + 1 \leq 2$

أي أن (من) $x + 1 \leq 2$ صفر $\leftarrow (x-2)^2 \leq 0$

والضرب (من) $x + 1 \leq 2$ صفر



والنوع يتم بالاشتراك:

شارة من $x + 1 \leq 2$

حيث صفر الاقتران $x^2 - 4x + 4$

شارة من $x + 1 \leq 2$

وصورة $x + 1 \leq 2$



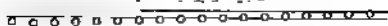
اشارة، إنتهائية

بضرب الاشارات

حل المتباينة من $x + 1 \leq 2$ صفر (قيم موجبة)



التبنيات والبرسجة الخطية



الحل كمجموعة: $\{ \text{من } (\sqrt{17}-2) \text{ من } (\sqrt{17}+2) \}$

وبكسوة: $(\sqrt{17}+2) , (\sqrt{17}-2)$

وعلى حدة الأعداد $\leftarrow \frac{1}{\sqrt{17}-2} \quad \frac{1}{\sqrt{17}+2} \rightarrow \infty$

ثالثاً من الدرجة الثالثة:

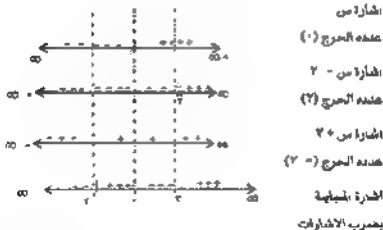
مثال:

حل المتباينة من $x^3 - 4x \geq \text{صفر}$ نحل الطرف الأيمن إلى هو

من $(x^3 - 4x) = x(x-2)(x+2) \geq \text{صفر}$

فأصغر الاقتوان أو أعداده الحرجة هي من $x = 2, -2, 0$

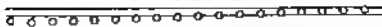
والحل يتم بالإشارات



مجموعة الحل للمتباينة من $x^3 - 4x \geq \text{صفر}$ هي سالبة

الحل كمجموعات من $\{ \text{من } \infty > \text{من } 2, 0 > \text{من } -2 > \text{من } -\infty \}$

التيارات والآراء السائدة في العملية



کتابخانه (۵۰ ، ۱۰۰)



رابعاً: حول المتغيرات الكعوية (والتي تحتوي القترافات نسبياً) مكونة من
بستق ومكس ومكسور 10-15 حبة لكل حبة

منظر فكر الآن على خواص علاقة الترتيب والتي تحتوي الرموز $>$ ، \geq ، $<$ ، \leq والتي بدورها تحول اشارة التثنية العكسية كمنعلاج قسمة البسط على المقام الى اشارة متباينة غير عكسية كحاصل ضرب البسط * المقام هكذا:

(لويزيجار شلموك اشارة التسمية الى اشارات للصرب) هكذا:

فلتحول اشارات التسمية الى اشارات ضرب نقول:

(1) اذ، مكان $\frac{من}{من}$ < ضمير اسكن من ، من اعداد حقيقية (الشرط من) من متشابهتان
في نفس الوقت

فازان من ، من به ستم را بخشد

مثالی

من المعلوم أن $\frac{4}{5} < \text{مفر لكك} \leq (5) (6) < \text{مفر أيضاً}$

وبهذا نكسر $\frac{0}{1} < \text{صفر ذلك فإن } (0 -) (1 -) < \text{صفر أيضاً}$

(ك) أما إذا لم يكن $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ معنى الحاصل من : هي أعداد حقيقية (شروط) ، هي مغلقة تحت

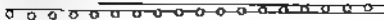
مثال

$$\frac{1}{4} \rightarrow \text{مصر} \leftarrow \text{لنا خير} (5) (6) \rightarrow \text{مصر ايضاً}$$

وڪڙاي ۽ $\frac{1}{2}$ مضر لڌا ٿي (6) (6) > مضر ايتقأ.



مقاييسات والبرمجة الخطية



هذه الخاصية مستمدة عموماً في حل المقاييسات الكسرية بعد جعل انطرف الأيسر لها (صفر) وتبسيطها أيضاً.

فيكون:

مثال:

$$\text{حل المقاييسات} \quad \frac{2+3}{-1} < 1 \quad , \quad 3 \neq 1$$

المحلل: لذا يجب استبعاد العدد 1

$$\frac{2+3}{-1} = 1 < \text{صفر} \leftarrow \frac{2+3}{-1} \frac{1-(-1)}{1-1} < \text{صفر}$$

$$\leftarrow \frac{2+3}{-1} \frac{1-1}{1-1} < \text{صفر}$$

$$\text{أي أن} \quad \frac{2+3}{-1} < \text{صفر} \quad , \quad 3 \neq 1$$

وبعد تحويل الاشارات الى الضرب نأخذ:

$$(3+1)(1-1) < \text{صفر} \quad \text{فحصاً}$$

والآن نأخذ الاشارات هكذا:

اشارة 2 من 1 +

$$2 \text{ من } 1 + = \text{صفر}$$

$$\text{من } 1 = \frac{1}{1} \text{ صفر}$$

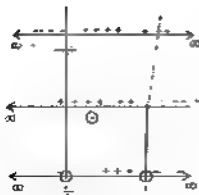
اشارة 1 من

$$1 - 1 = \text{صفر} \quad \text{من } 1 = \text{الصفر}$$

$$1 - 1 = \text{صفر} \quad 1 = \text{موجب}$$

بضرب

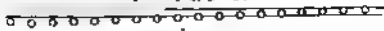
الاشارة



وبعد أن انضايقة < كلها في السؤال



المتباينات والبرمجة الخطية



لأن مجموعة الحل للخطية: $\{x \mid x > 1\}$

وعلى حدة الأعداد

ونظرة (1) $\frac{1}{2}$ ، (2) فالعدد 1 مستبعد أصلاً

ملحوظة:

هناك طريقة أخرى بدل تحويل الإشارات القسمية إلى ضرب هو ممكن

بقسمة الإشارات كما في المثال التالي:

مثال:

$$\text{حل المتباينة } \frac{x^2 - 12x + 36}{x - 1} \leq 0 \quad , \quad x \neq 1$$

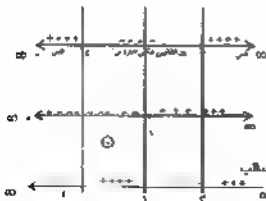
لذا يجب استبعاد العدد 1 من المجموعة الحل.

نحل السؤال مباشرة بقسمة الإشارات دون تحويل القسمية إلى ضرب هكذا:

$$\text{إشارة } x^2 - 12x + 36 = \text{منفر}$$

$$(x - 6)^2 \text{ (م) (م) (3 - 3) منفر}$$

$$x = 6 \text{ ، } 6$$



الإشارة -

$$x - 1 = \text{منفر}$$

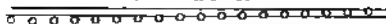
$$x = 1 \text{ منفر}$$

$$x = 6 \text{ ، } 6 \text{ (ق) (ق) (3 - 3) منفر}$$

إشارة العكس

ويم أن إشارة للتباين موجبة كونها < منفر





وبعد أن نرى أن x لا يحقق تقييد العدد 1

فإن مجموعة الحل: $\{x \mid 4 \leq x < 6, 2 \leq x < 10\}$

وعلى جملة الأعداد \mathbb{R}

وهكمنة $x \in [4, 6) \cup [2, 10)$ نجد استبعاد العدد 1

لخاصة، حل متباينات تحتوي الفترات القيمة المطلقة:

نذكر عزيزي الدارس هذه الخاصية (نرى شكلين) المفيدة عند حل المتباينات التي تحتوي الفترات القيم المطلقة وهي:

الحق الأول:

إذا كان $|x| > a$ ، حيث $a > 0$

فإن $x > a$ أو $x < -a$

مثال:

إذا كان $|x| > 5$

فإن $x > 5$ أو $x < -5$

الحق الثاني:

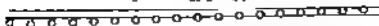
إذا كان $|x| < a$ ، حيث $a > 0$

فإن $-a < x < a$ (أو) $x > -a$ و $x < a$

مثال:

إذا كان $|x| < 5$

فإن $-5 < x < 5$ (أو) $x > -5$ و $x < 5$



مثال

$$\text{حل المتباينة } |x+2| > 2$$

بعد ذلك القيمة المطلقة واعتماداً على الخاصية يشقها الأول.

$$-2 < x+2 < 2$$

$$-2 - 2 < x+2 - 2 < 2 - 2$$

$$-4 < x < 0$$

مجموعة الحل: $\{x \mid -4 < x < 0\}$

وعلى خط الأعداد

$$(-4, 0)$$

مثال

$$\text{حل المتباينة } |x+2| < 0$$

وبعد ذلك القيمة المطلقة واعتماداً على الملاحظة يشقها الثاني إن:

$$x+2 > 0 \quad \text{أو} \quad x+2 < 0$$

$$x > -2$$

$$x < -2$$

$$x > -2$$

$$x < -2$$

$$x > -2$$

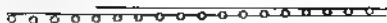
$$x < -2$$

مجموعة الحل: $\{x \mid x > -2, x < -2\}$

وعلى خط الأعداد

$$\text{مستويات } (-\infty, -2) \cup (-2, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$





مثال:

$$\text{حل المتباينة } |x - \frac{1}{2}| \geq 7$$

$$x \geq \frac{1}{2} + 7 \quad \text{أو} \quad x \leq \frac{1}{2} - 7$$

$$x \geq \frac{1}{2} + 7 \quad \text{أو} \quad x \leq \frac{1}{2} - 7$$

$$x \geq \frac{1}{2} + 7 \quad \text{أو} \quad x \leq \frac{1}{2} - 7$$

أي أن $x \geq 7\frac{1}{2}$ أو $x \leq -6\frac{1}{2}$

مجموعة الحل: $\{x \mid x \geq 7\frac{1}{2} \text{ أو } x \leq -6\frac{1}{2}\}$

على خط الأعداد

وكيفية

مثال:

$$\text{حل المتباينة } |x| \geq 2$$

هذه المتباينة تعطينا

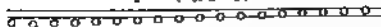
$$x \geq 2 \quad \text{و} \quad x \leq -2$$

وبعد ذلك القيمة المطلقة فإن مجموعة الحل:

$$\{x \mid x \geq 2 \text{ أو } x \leq -2\} \quad \text{و} \quad \{x \mid x \geq 2 \text{ أو } x \leq -2\}$$

وعلى خط الأعداد





وشرط

مجموعة الحل: $\{x: x > 5 \text{ و } x \geq 2, x \geq 5\}$

وعلى خط الأعداد يكون هو أمثلة

وكثيرات: $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ فقط

سأبدأ حل متباينات تحتوي اقترانات أكبر عدد صحيح،

مثال:

حل المتباينة $x > 2 \text{ و } x + 1 > 3$

بما أن قيمة الاقتران أكبر عدد صحيح تساوي دائماً عدداً صحيحاً

فإن $x + 1 > 3$ حيث x تقع بين 2 و 3 هكذا:

$$x > 2 > 2$$

وحيث أن x ^{نصف} _{بمئات} $x \geq 2 \text{ و } x > 2$ تكون 3 من

فإن $x \geq 2 \text{ و } x + 1 > 3$

$$\begin{array}{r} 1 - 1 = 1 - \\ \hline 2 \geq x \end{array}$$

مجموعة الحل: $\{x: x \geq 2 \text{ و } x > 2\}$

وعلى خط الأعداد

وكثيرات: $(2, \infty)$





مثال.

حل المتباينة $2 < 1 + 3x$ $x \geq 1$

بما أن المتباينة $2 < 1 + 3x$ $x \geq 1$ $\{x \geq 1\}$ تعطي المساواة

لذلك وحسب التعريف العام لدينا $x \geq 1$ $x > 1$

لأن $2 \leq 1 + 3x$ $x > 1$

$$1 < 1 - 1 < 1$$

$$2 \leq 2 < 3$$

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$$

$$\frac{6}{3} > 2 \geq 1$$

مجموعة الحل: $\{x \mid x \geq 1\}$ $\{x \mid x > \frac{6}{3}\}$

وعلى خط الأعداد

$$\left(\frac{2}{3}, 1\right]$$

(٩-٣) حل نظام من متباينات خطية بمطيري

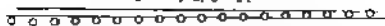
لدينا بالمتباينة الخطية بمطيري:

نكمن أن هناك معادلات خطية بمطيرين مثل $2 + 3x = 1$

فيه يوجد متباينات خطية بمطيرين مثل $2 + 3x < 1$ على سبيل المثال

وبلاحظ أن الطرفين الأيمن لكل من المعادلة والمتباينة متساويين، لذلك نسمى

معادلة $2 + 3x = 1$ للمعادلة المقابلة أو المرافقة للمتباينة $2 + 3x \leq 1$



لذلك فإن الحول جديدة وتكاد تكون غير متناهية.

ويمكن أن نوضح هذه الحول بنصف مستوى وبالتماثل البياني هكذا: وهذا

ما يسمى الحل البياني للمعادلة الخطية للواحدة ومقتربين.

مثال

أوجد منطقة الحل للمعادلة $2x + 3 \leq 1$

نرسم أولاً المعادلة المتناظرة أو الموافقة وهي $2x + 3 = 1$

وهذا بدوره يمثل خط مستقيم (وعندما تحتوي المتباينة أو المساواة مثل \leq

أكبر أو يسوي شاكط مضلع أو مستمر) يقسم المستوى الديكارتي أو المنطق

البياني إلى قسمين أحدهما منطقة الحل والآخر لا

نقسم المستوى الذي يحقق المتباينة $2x + 3 \leq 1$ يسمى منطقة الحل

ككما يلي:

لرسم المعادلة الموافقة $2x + 3 = 1$

والمعادلة المتناظرة لتقع بوضع = بدلاً من \leq ككما هو واضح أعلاه

3	2	1	0
1	2	3	4



لإيجاد من معلم من أي نفرض من = صفر

لإيجاد من معلم من أي نفرض من = صفر

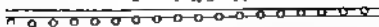
ككما في الجدول أعلاه

بما أن الخط المستقيم الذي يمثل

المعادلة المتناظرة أو الموافقة يقسم

المستوى إلى قسمين فإن أحدهما

منطقة الحل ككما أسلفنا.



ولمعرفة أي من التقاطع هو منطقة الحل نتحقق نقطة الأصل و $(+)$ و $(-)$ في الجدول،
هنا حلق تحت المنطقة المتباينة فالتصنيف الذي يحويها هو منطقة الحل وإذا لم تحلق
فالتصنيف الآخر هو منطقة الحل:

$$\text{هكذا: } 2 \leq 3 + 2$$

$$2 \leq 5 + (-2)$$

$$2 \leq 3 \quad \text{الجواب لا}$$

فنصف المستوى الذي لا يحتوي نقطة الأصل هو منطقة الحل، والخط المتصل يقع
ضمن منطقة الحل، لذلك مثله كما في الشكل.

ملحوظة هامة:

يمكن أن المتباينة إذا امتدحت المساواة مثل $3 \leq 5$ فالخط المستقيم
الذي يمثل المعادلة المرافقة $3 = 5$ متصل، وإذا لم تحقق المتباينة المساواة مثل
 $3 < 5$ مثلاً فالخط الذي يمثل المعادلة المرافقة $3 = 5$ متقطع كما
يلي:

مثال:

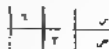
مثل منطقة الحل للمتباينة بيانياً في المستوى الديكارتي.

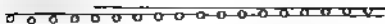
$$3 < 2 + 2$$

$$\text{المعادلة المرافقة } 3 = 2 + 2$$

والخط الذي يمثلها متقطع تكون المتباينة $3 < 2 + 2$ لا تحتوي المساواة

برسم المعادلة المرافقة أو المعادلة هكذا:





لا يوجد من تعلم من ٤ = صفر

لا يوجد من تعلم من ٤ = صفر

نصوص نقطة الأصل لا للتصني



$$٦ > ٢٠$$

$$٦ > ٢٠$$

$$٦ > ٢٠$$

الجواب لا

منطقة الحل لا يشمل نقطة الأصل

هذا ويمكن أن يختص أحد التفرعين من المتباينة تكون مدامك يساوي صفر

مثل: $٥ \geq ٥$ ، $١ \leq ١$ ، $٥ > ٥$ ، $١ < ١$ وهكذا .

سؤال لا بُد منه:

هل المتباينة من $٥ \geq ٥$ خطية ومتغيرين أم لا ؟

الجواب: نعم والسبب والتفسير كما يلي:

انها خطية ومتغيرين وهكذا:

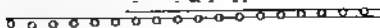
$$١ + ٥ = ٥$$

$$١ \leq ٥$$

انها خطية ومتغيرين وهكذا:

$$١ + ٥ = ٥$$

وهكذا .



مثال

مثل بيان مجموعة الحل (منطقة الحل) للمعادلة:

$$x \leq -2$$

المعادلة المقابلة $x = -2$

وبما أنها خطية لأنها $x + 2 = 0$

والخط متصل

لرسمه هكذا:



ونعوض نقطة الأصل في المتباينة

$$x \leq -2$$

$$-2 \leq -2$$

الجواب: نعم

فمنطقة الحل تعوي نقطة الأصل خطها هكذا.

ملحوظة:

إذا لم نحصل المستقيم الذي يمثل المعادلة المتناظرة في نقطة الأصل فإن تعويض المتباينة

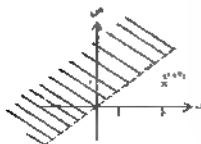
يكون هكذا:

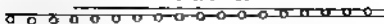
مثال:

مثل بيان منطقة الحل للمعادلة $x > 2$

لمعادلة خطية $x = 2$

نعوض نقطة أخرى





الآن معرفة منطقة الحل فنعرض نقطة غير نقطة الأصل تكون المستقيم يمر بها
ولتكن (٢، ١) في التباينة

٢.١ الجواب: لا

لمعرفة الحل لا تحوي النقطة (٢، ١) نطلوها بالشكل

مثال:



فلن نطعم حل التباينة الآتية على المستوى الديكارتي

٢ من $5 \leq 10$ كما في الشكل الأول.

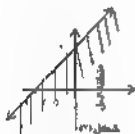
حيث أنها ممثلة على السطح البياني فلم يبق من الحل

إلا الشكل. وبما أن الخط المستقيم لا يمر بنقطة الأصل

فلذا نعرضها في التباينة:

$$10 \geq (5) - (0)(2)$$

صفر $10 \geq$ نعم



فمنطقة الحل هو نصف المستوى الذي يحتوي نقطة الأصل كما في الشكل (٢)

ملاحظة:

ومن الجدير بالذكر أن المعكوس صواب، أي من التمثيل البياني للمنطقة

الحل يمكن إيجاد التباينة الخطية كما في المثال.

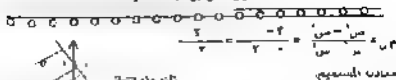
مثال:

اكتب التباينة التي يمثل منطقة الحل كما في الشكل

أولاً نجد معادلة الخط المستقيم الذي يمثل

المعادلة معادلة هكذا وفق الهندسة التحليلية





م (مى - مىر)

مس ۲۰۰ + ۲۰۰ = ۴۰۰ (مس ۲)

ص ۱۰۰ ح ۲ ص ۱۰۱ ح ۲

والآن نضع $\leq \geq$ حسب تعريف نقطة الأصل حيث تقع في منطقة 'الحس'.

من ٢٠٠٠ إلى ٢٠٠٢ هي الفترة المطلوبة

بالتعويض $(1, 1)$ في المعادلة $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{c}{d}$ نحصل على:

٢٠. النهاية المطلوبة هي $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

والآن ننتقل إلى حل نظام من المتباينات الخطية بمتغيرين:

والنظام في المادة يحتوي متباين أو أكثر، ولا يوجد منطقة الحس للنظام فرد.

مطلوب منطقتي الحل تكون متجاورتا في النظام فتكون منطقة الحل هي المنطقة الناتجة

من قاعات مناطق الحل للمشاهدين معاً أو منطقة التظليل المتحركة كما يلي

1154

ارسم منطقة حل النظم من > 5

1-25

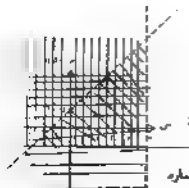
1422

درس ١٠٠: المعاداة المرافقة لكل مثلية

أولاً من \rightarrow ← من ه المرحلة المرافقة

والحيث عسكنا

و سبطه، حكومتها احمر من ذنوبي على يساره





نكتب في الحل

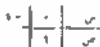
ثانياً من \leq $1 \leftarrow$ من $=$ 1 المعادلة للرافقة

والخط متصل

و المنطقة مكونها أكبر من 1 هي: أعلاه

نكتب في الشكل

ثالثاً، من $>$ 1 \leftarrow من $=$ 1 المعادلة للرافقة



الإيجاد من لعدم من 2 من 0

الإيجاد من لعدم من 1 من $=$ صفر

والخط منقطع

فمنطقة الحل بلا زوايا هي \leftarrow

مثال:

أرسم منطقة الحل للنظام

من \leq صفر

من \leq صفر

من $+$ من \leq 2

من \leq صفر \leftarrow من $=$ صفر للمعادلة للرافقة وهي محور الصادات

ومنطقة الحل على القيمين تكونها نحوي $<$

من \leq صفر \leftarrow من $=$ صفر للمعادلة للرافقة

وهي محور السينات

والتشغيل والآيدي العاملة للفترة الرقعة وعدد الآلات المتواجدة في مصنع وإموار
الأوليا المتوفرة في الأسواق ورأس المال المستثمر في عمالة الإنتاج وعمالة التسويق
للإنتاج وغيرها من القيود

لذا لكي لا يد من وجود برنامج خطي فسير عليه للتشك وسيمسه الاقتصادية
بجامعة تترجم هذا البرنامج على أرض الواقع، واضعوها (السياسة الاقتصادية) أو
البرنامج الخطي هم الخبراء والاقتصاديون، من هذا تولدت البرمجة الخطية
كأصلوب رياضي يُستخدم لإيجاد أكبر قيمة للربح (للمعظم الربح) أو أقل قيمة
للتكلفة (لأقل التكلفة) لافتراض خطي في كل مجموعة من القيود والتي تفردها
منهجة المشكلة للوصول إلى الإنتاج الأمثل والتي يمكن صياغتها على صورة عدد
من المتغيرات الخطية وبالاختصار القيود، تستخدم البرمجة الخطية لتعديد حجم
الأمثل للمشروع الذي يحقق أقصى الأرباح بالالتزام بقيود مفروضة عليه، ولا تنسى
أن معظم الربح يتم بتحويل التكلفة إلى حدده الأدنى أو بزيادة الأرباح إلى حدده
الأقصى وكلاهما له نفس المعنى

والبرنامج الخطي يتكون دائماً من ثلاثة أجزاء وهي وعلى الترتيب

(i) الافتراض الهدف Objective Function،

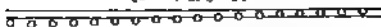
وهو الافتراض الذي يُراد جمعه فائدة على شكل

(ii) مجموعة القيود أو القيود الهيكلية Structural Constraints،

وهي القيود التي تفردها طبيعة المشكلة والمتعلقة بوظيفة المنشأة الإنتاجية من
حيث عدد ساعات العمل اليومي وحجم رأس المال المستثمر وغيره

(iii) متطلبات عدم السالبية Non-Negativity Requirements،

وتتميزها بشكل بسيط وسهولة أن المنشأة لا تنتج إلا عدداً من الوحدات يكون
موجباً أو صفر أي أن الإنتاج لا يُقبل أن يكون سالباً (0)



وبكتابة المبرانسج الخطي تبدأ بالآلة:

مثال:

مصنع لانتاج الحليب والماعز الجبنة، يتوفر لديه ٥٠ م^٣ من الجلد الخام يومياً، فإذا كانت صناعة الحبيوة الواحدة تحتاج الى ١ م^٣ من الجلد الخام والى ٣ ساعات عمل يومياً وتصل الى الحبيوة عند ذبحها ربحاً مقداره ديناران، وسكانت صناعة المعطف الواحد تتطلب ٢ م^٣ من الجلد الخام والى ٤ ساعات عمل يومياً ويصلي المعطف عند بيعه ربحاً مقداره ٤ دنانير، فإذا علمت أن ساعات العمل المتاحة في المصنع ١٨ ساعة يومياً.

أكتب برنامجاً خطياً لبدء المصالة

نفس من أن المصنع يريد انتاج من حبيوة يومياً.

ويريد انتاج من معطف يومياً

رتب المعلومات الممثلة هكذا

حداك	معاطف	المشفر من الجلد الخام يومياً
١ م	٢ م	
١ م + ٢ م	٤ م	٥٠ م (١)

ساعات العمل المتاحة يومياً

$$١ م + ٢ م \geq ١٨ \quad (٢)$$

لانتاج من حبيوة نحتاج من ١ = ١ م^٣

ولانتاج من معطف نحتاج من ٢ = ٢ م^٣

جعداً ١ م + ٢ م > ٥٠ م^٣ كلما هو أعلاه

وبذلك ٢ م + ٤ م > ١٨ م^٣ كلما هو أعلاه



الاقتران الجيد

الربيع من الحقلين $2 \times 2 = 2^2$ من 2^2 من دينار

والربيع من المعاطف * $\frac{1}{2}$ من π من $\frac{1}{2}$ من π

فَالْاِقْتِرَافُ اَنْ يَكُونَ ٢٠ س + ٤٠ هـ دِيَتَارِ

والآن نترجم المعلومات السابقة الى برنامج خطى كما يلى.

القصص

١ س ٢٠ من ج ٥٠ يكون الصنيع مستقداً ٥٠ م* أو أقل وأما أكثر فلا:

٣ من ١ من ١٨ مكتب العمال يستعملون العمل ١٨ ساعة فأقل:

الاشتراك في البريد

د ۲۰۰۶ مې ۴ مه

قيود عدم التفاضلية:

من ك صفر الخالق الحقائق ليس مائلاً إجمالاً بل موجب أو صفر

وَمَكَدَكَ مِنْ كَ حَمَرٍ اِنْتَايَ الْخَاطِفِ لِهَمٍ مَالِيَاً اَطْلَافًا يَلُ مَوْجِبِ اَوْ حَمَرٍ

المحفوظة جديدة بالاعتقاد

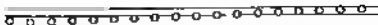
العلم من حيث الالتحاق نوعان هما:

الأول: سلع لا يمكن إنتاجها إلا من خلال مصفحة موحدة مثل الأجهزة الكهربائية

والثلاجات والحقائب المدرسية، حيث لا مضي لتصف ثلاثية كوا اربع حقبة

هنا، فإن التفرعات للسلطة كلها (ن، ص) تكون أعداد متصلة أي أعداد

عن أبيه عن حماد بن عمار



الثاني، سنح يمكن اقتلاجها بأعداد حقيقة موجبة أي يمكن أن تكون على شكل أعداد كسرية كعدد الكيلو أو الحبوب بأنواعها إذ يوجد هناك نصف كغم مسكر وربع كغم أرز وثلاث طن قمح وهكذا...

د، فإن المتغيرات الدالة على عدد لقيحها تكون متصلة أي صحيحة وكسرية أيضاً.

(4- 5) الطريقة الهندسية لحل البرنامج الخطي بمظهرين Graphical Method

ترتبط هذه الطريقة بالتشغيل الفيزيائي للمتباينات الخطية كما يلي

مثال،

ينتج مصنع يومياً صنفين من التلاجات هما الكبير الحجم والصغير الحجم ويستخدم لهذا الغرض معملين.

فإذا كان إنتاج التلاجة كبيرة يحتاج إلى ٦ ساعات عمل في المعمل الأول

و ٢ ساعات عمل في المعمل الثاني

والإنتاج التلاجة صغيرة يحتاج إلى ساعتين عمل في المعمل الأول

و ٥ ساعات عمل في المعمل الثاني

وإذا كانت الطاقة الإنتاجية للمعملين لا تزيد عن ١٢ ساعة، ١٥ ساعة يومياً وعلى الترتيبه أوجد عدد التلاجات الواجب اقتلاجها يومياً لتحقيق أكبر ربح ممكن عندما يأخذ ربح مصنع في التلاجة الكبيرة ٧٥ ديناراً وفي التلاجة الصغيرة ٥ ديناراً

الحل،

مصرح أنه ينتج من تلاجة كبيرة ، من تلاجة صغيرة





ترتيب المعلومات المعطاة:

المنطقة الإنتاجية بالمعدات	(س)	(س)
	الحجم الصغير	الحجم الكبير
المعمل الأول	٦ س + ٢ ص \geq ١٢	
المعمل الثاني	٣ س + ٥ ص \geq ١٥	
الاقتران الهدف:	و $٧٥ = ٢٥ س + ٥٠ ص$	

عدد الساعات $س \leq$ صفر حيث الإنتاج ليس مفيداً على الإطلاق

من $ك$ صفر حيث الإنتاج ليس سالباً على الإطلاق

الآن نمثل المتباينات على المستوى الديكارتي معاً وعلى سطح واحد.

علماً بأن عدم السابعية (س \leq صفر ، من $ك$ صفر) يحصر منطقة الحل في الربع الأول، حيث لا إنتاج سالب على الإطلاق

أولاً، نمثل المتباينة الأولى.

$$٦ س + ٢ ص \geq ١٢$$

معادلة استقامة:

$$\frac{٦ س + ٢ ص = ١٢}{٢}$$

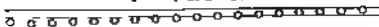
$$٦ س + ٢ ص = ١٢$$



وحيث أن مقطعة الأصل يحقق المتباينة،

$$١٢ > ٦(-) + ٢(-)$$

منطقة التحل للمتباينة باتجاه مقطعة الأصل -



ثانياً: معادلة التفاضلية:

$$y' + y = 10$$

المعادلة، المرافقة $y' + y = 0$ مع $10 = 0$

$$\begin{array}{r|l} 10 & y' \\ \hline 0 & y \end{array}$$

وحيث أن نقطة الأصل تحقق المعادلة

$$10 \geq (y' + y) = 0$$

فمسألة الحل للمعادلة باتجاه نقطة الأصل

فمسألة الحل للمعادلة من المتباينات هو التفاضل الريعي y و y' كما في الشكل

ولأن التفاضلات من التفاضل التي لا تتج إلا بأعداد صحيحة سواء أكانت
صغيرة أو كبيرة، فإننا نبحث عن الأرواح المثلثة ذات المسافات الصحيحة داخل
مسألة الحل لتسليم الترخ.

مسجد أولاً: أعدادات نقطة التفاضل y نرى هل تنضم إلى الأرواح المثلثة عند
تسليم الترخ أم لا ؟

وذلك بحل المعادلتين المتباينتين بالمعتمد مسكداً

$$(1) \quad y' + y = 10$$

$$(2) \quad y' + y = 10$$

$$y' + y = 10$$

مع $y' = \frac{1}{x}$ ليس عدداً صحيحاً لأن لا يصلح أن يكون عدداً يمثل إنتاج التفاضلات

$$y' + y = 10$$

$$y' = \frac{1}{x} \quad y = 10$$



التكاليف والمربحة الخطية

$$10 = 9 - 74 = \frac{9}{5} - \frac{7}{1} = 2 \text{ من}$$

$$\text{وبالتصريب للتبادلي} \quad \frac{10}{5} = \frac{9-7}{1}$$

$$15 = 3 \text{ من}$$

من $\frac{10}{5} = 2$ ليس عدداً صحيحاً فلا يمكن أن يكون عدداً يمثل إنتاج ثلاثيات

.. النقطة $(\frac{9}{5}, \frac{10}{5})$

لا تدخل في نقطة متطيرم كما في الجدول التالي:

والآن نقوم بتكثير الربح بإيجاد قيمة القتران الهدف الذي يمثل أقصى ربح
ونناقش كل نقطة مساهمة أعداد صحيحة (الثلاثيات للتج بأعداد صحيحة فقط)
هكذا

د	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	عدد الثلاثيات الصحيحة
1	2	1	1	1	1	1	1	1
2	7	7	1	1	1	1	1	1
3	10	10	1	1	1	1	1	1
4	15	15	1	1	1	1	1	1

وبموض كل زوج مرتب أهله في القتران الهدف لتحقيق أكبر قيمة للربح هكذا:

$$\text{بما أن } 74 = 50 + 24 \text{ من}$$

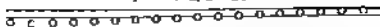
$$\text{هنا } 74 = 70 + (-) 50 = \text{مفتر} \text{ لا ربح ممكنه لا إنتاج / مرسوم أملاً}$$

$$74 = 70 + (-) 50 = \text{مفتر} \text{ لا ربح ممكنه لا إنتاج / مرسوم أملاً}$$

$$74 = 70 + (-) 50 = \text{مفتر} \text{ لا ربح ممكنه لا إنتاج / مرسوم أملاً}$$

$$74 = 70 + (-) 50 = \text{مفتر} \text{ لا ربح ممكنه لا إنتاج / مرسوم أملاً}$$

$$74 = 70 + (-) 50 = \text{مفتر} \text{ لا ربح ممكنه لا إنتاج / مرسوم أملاً}$$



$$\text{و هـ} = 75(3) + 50(1) = 175 \text{ دينار}$$

$$\text{ر ن} = 75(-) + 50(2) = 100 \text{ دينار}$$

$$\text{, ل} = 75(1) + 50(2) = 175 \text{ دينار}$$

$$\text{ر و} = 75(-) + 50(3) = 150 \text{ دينار}$$

ومن الجدول نرى أن الربح اليومي يمكن أن يكون أكبر ما يمكن ومقداره 175 دينار عندما ينتج المصنع ثلاثة من الحجم الكبير واثنين من الحجم الصغير

أحياناً وعندما يكون المتغيران x و y من متصليين والنقطة P ممثلة بحل مسدود يمكن عند تحليل الربح بالنقطة الركنية (الوجود في الزوايا والأركان) تكوين النتائج الأمثل (الذي يحقق أقصى الأرباح) يمثل بالنقطة المبردة من نقطة الأمس وهذا ما يوضحه المثال التالي:

مثال:

ينتج مشغل معين من القمصان يومياً، الأول رجالي ويبيع بالقميص ٤٠ وحدة ٢ دينار والآخر ولادي ويبيع بالقميص ٦٠ وحدة ٣ دينار، فإذا كان هذا المصنع قادراً على إنتاج ما لا يزيد عن ٢٠ قميصاً من النوعين يومياً، فكم قميص من كل نوع يجب أن ينتج يومياً لتحقيق أكبر ربح ممكن، شرط أن لا ينتج أقل من ٤ قمصان من النوع الأول يومياً؟

استخدم الطريقة الهندسية:

الحل:

نمصر أنه ينتج من القمصان الرجالي يومياً من قميص

ومن القمصان الولادي يومياً من قميص

قمصان رجالي	قمصان ولادي	الطاقة الإنتاجية
(س)	(س)	



التباينات والأبرمجية الخطية



المعد $ص + ص \geq ٢٠$ تكونه لا ينتج الكبير من ٢٠

$ص \leq ٤$ تكونه لا ينتج أقل من ٤ رجائي

عدم المعانيه $ص < صفر$ ممكن أن لا ينتج أي قيم من هذا

النوع (الولادي)

الافتراض الهدف: $ص + ص = ٢٠$ أكبر ما يمكن

نقوم الآن بتمثيل المتباينات $ص + ص \geq ٢٠$ (١)

$ص \leq ٤$ (٢)

$ص \leq صفر$ (٣)

على المستوى الديكارتي نفسه

أولاً نكتب $ص + ص \geq ٢٠$

المعادلة التوافقية

$ص + ص = ٢٠$

والخط متصل أي ينتمي إلى منطقة الحل

$ص \geq ١٠$

$ص \leq ٤$

من ٤ والخط متصل

تمثل $ص = ٤$ وعلى يمينه كما

في الشكل.

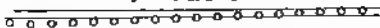
عدم السالبة.

أي $ص < صفر$ تكون من ٤

من $صفر$ يحددان منطقة الحل في الربع الأول



التبديلات والتوزيعات الخطية



وبما أن عدد التماسك للنتيجة يجب أن يكون أعداد صحيحة فقط، لا يعقل إنتاج صنف قميص ثم تموجته ستكونه محيبي ويمود إلى لشغل حال رأيتة بها الشكل.

لذا فإننا نعظم الربح ونزواج مرتبة مسطحتها أعظم مسطحه والنتيجة الربحية فقط.

$$\text{بعد احداثيات التبديلات: عندما } x = 4 \text{ فإن } y = 30$$

$$\text{ومنها } x + y = 34 \leftarrow y = 30$$

$$\therefore \text{ احداثيات } (4, 30)$$

وتكون الجدول (الأزواج المرتبة عديدة، فإن الإنتاج الأمثل يتمثل بالطرف، لذا فإننا نستخدم نقطة الأصل منها حيث لا إنتاج ولا أرباح تمثلها نقطة الأصل، كما في الجدول التالي:

	1	2	3	
م	1	2	4	
م	16	0	0	
الربح	44	60	12	

$$\text{بعد أن } x = 3 \text{ م } y = 2$$

$$\text{فإن } x = 2 + (6) = 8 \text{ م } y = 0 \text{ م}$$

$$\text{وب } x = 20 + (0) = 20 \text{ م } y = 0 \text{ م}$$

$$\text{و } x = 4 + (16) = 20 \text{ م } y = 12 \text{ م}$$

ومن الجدول يتبين أن الربح اليومي يكون أكبر ما يمكن عندما ينتج 2 قميص رجالي، ولا ينتج أي قميص ولائي إلا إذا تغيرت الظروف الاقتصادية والأحوال المعيشية للريتلز الكرام.





٩) الطريقة الجبرية لحل البرمجة الخطية يتمتيزين Algebraic method

ترتبط هذه الطريقة بعمليات للصف البسيط Simple Row Operations وهذه
 نعميات قادرة على تحويل أنظمة المعادلات الخطية إلى أنظمة أخرى مكافئة ب
 باسند لمعادلة في حل البرمجة الخطية المطلوب
 ولتوضيح هذه الطريقة نناقش هذا المثال بخطوات مرتبة ومبسطة هكذا
 مثال:

تريد شركة أن تنتج نوعين من السلع، ويحتاج إنتاج الوحدة من النوع الأول
 إلى ساعتين عمل في قسم التشغيل الآلي، وساعتين عمل في قسم التغليف اليدوي، في
 حين تحتاج الوحدة من النوع الثاني إلى ٢ ساعات عمل في قسم التشغيل الآلي،
 وساعة عمل واحدة في قسم التغليف اليدوي.

إذا فرض أن ربح الشركة سيكون ٦ دنانير للوحدة من النوع الأول

و ٨ دنانير للوحدة من النوع الثاني

ولأسباب فنية لا يمكن العمل بنسبة التشغيل الآلي والتغليف اليدوي أكثر من
 ١٢ ساعة، ٨ ساعات يومياً على التوالي

كم وحدة من كل نوع يجب أن تنتجها الشركة يومياً حتى تجعل ربحها العظمي
 أكبر ما يمكن؟ باستخدام الطريقة الجبرية

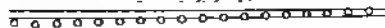
نتم خطوات الحل هكذا

معرض أن عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول من وحدة

وعدد الوحدات المنتجة من النوع الثاني من وحدة

ريد، يكون الاختلاف المحفوف $6 - x + 8y$ من دوالاً

التباينات والبرمجة الخطية



درج، مجموعات المعطيات النوع الأول النوع الثاني عدد الساعات المتاحة

قسم الشحير الأولي ٢ ص ٩ ٢ ص ١٢ \geq

قسم المعروض اليدوي ٢ ص ٤ ١ ص ٨ $>$

مع الانتباه لعدم السالبة حيث المصنع لا ينتج إطلاقاً كميات سالبة من الداجه موجب أو صفر (في حالة توقفه عن الإنتاج)

أي أن من \leq صفر \geq صفر

نبدأ باستخدام متغيرات وعدة جديدة لتحويل التباينات والاقتراض الهدف لن نطرح من المعادلات الخطية باستثناء التباينات المتعلقة بعدم السالبة (من \leq صفر ، من \leq صفر) هكذا:

$$٢ \text{ من } ٣ \text{ ص } ١ + ل + ك + ح(٠) = ١٢ \text{ ————— } (١)$$

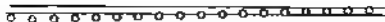
$$٢ \text{ من } ١ \text{ ص } ١ + ل + ك + ح(٠) = ٨ \text{ ————— } (٢)$$

$$٨ \text{ ص } ١ + ل + ك + ح(٠) = \text{صفر} \text{ ————— } (٣)$$

وكما نلاحظ أن معاملات المتغيرات الوهمية الجديدة، يُعلم أنها مثلثان (معاملاتها أصغر) في كل صند

ثم نقوم بترتيب المعاملات والثوابت كما هو مبين بالجدول التالي

الثوابت	ح	ك	ل	من	ص
١٢			١	٣	٢
٨	٠	١		١	٢
٠	١	٠		٨	١



الآن نبحث عن الركيزة الأولى، والتي تكون في العمود الذي في صفه الأخير أقل عدد منالب. وهنا الركيزة في العمود من الثاني (عمود معاملات من)، أي أن الركيزة هي ٢ أو ١ وحتى نختار الركيزة بطريقة سليمة فإتينا بنقسم معاملات عمود الثوابت على معاملات عمود من وحاجت لتقسمة الأقل يدل على الركيزة

$$1 \div 2 = 0.5$$

$$8 \div 1 = 8$$

وبما أن ١ أقل من ٨ فللتقسوم عليه (٢) هو الركيزة في الصف الأول والركيزة الأخرى في الصف الثاني ولتست بنفس صف الأول، أي أن الركنان في صفين وليس في صف واحد وهما هنا (٢) ، (٢) حكمنا في الشكل الأول

في الصف الأول في الصف الثاني

من	من	ل	ك	ج	الثوابت
٨	(٢)	١	٠	٠	١٢
(٢)	١		١		٨
٠	٨	٠	٠	١	٠

وبذا نكون قد حددنا مكاناً من الركيزتين بمادوما وصفها حكمنا هو أعلام

نقوم الآن بالدوران حول الركنان (تغييرات نفوية هائلة) وذلك بأن نجعل قيمة كل ركيزة تساوي الحد المسموح "١" وجميع الأعداد في عمودي معاملات من ، من اصغرأ استمعة بمعاملات الصف البسيط، والتي وردت في عمود المصفوفات والمحددات، وهذه العمليات متصلة مع بعضها البعض بشكل بسيطة وسهلة كما يلي



القياسات والبرمجة الخطية

	س	ع	ل	ك	ح	الثوابت
(-)	٢	(٣)	٢	٠		١٢
	(٢)	١		١		٨
	١	٨	٠	٠	١	

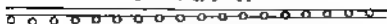
	س	ع	ل	ك	ح	الثوابت
دالة	$\frac{1}{2}$	(1)	$\frac{1}{2}$		٠	٢
	(3)	1	٠	1	٠	٨
	١ -	٨ -	٠	٠	1	٠

	س	ع	ل	ك	ح	الثوابت
جدا	$\frac{1}{2}$	(1)	$\frac{1}{2}$	٠	٠	1
	(-)	(-)		١		1
	$\frac{1}{2}$ -	٠	$\frac{1}{2}$	٠	١	١٢

نكتة بالامكان ان عامود البرمجة الاولى (س) اصبحت جامداً وليس العنود
لخطوية ، ومنه سوف نجهل عامود البرمجة الثانية من هكنا ،

	س	ع	ل	ك	ح	الثوابت
الاجراء على	$\frac{1}{2}$	(1)	$\frac{1}{2}$	٠	٠	1
عنود	(١)		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	٠	٨
	$\frac{1}{2}$ -		$\frac{1}{2}$	٠	1	١٢

	س	ع	ل	ك	ح	الثوابت
	(1)		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	٠	٢
	(1)	٠	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	٠	٢
	٠	٠	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	١٢



والآن حصلنا على المصفوفة التي نريد وهي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ونلاحظ } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ معلومة الثواب}$$

$$2 = \text{من } 0$$

$$2 = \text{من } 0$$

$$2 = \text{من } 0, 2 = \text{من } 0$$

أي أن الشبكة يجب أن تنتج 2 وحدات من النوع الأول

و 2 وحدة من النوع الثاني

حتى نحقق ربحاً مقداره 24 ديناراً

للتحقق:

نأخذ الافتراض التالي:

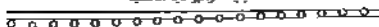
$$x = 0 \text{ من } 0$$

$$\text{والآن } 24 = 2(0) + 2(12)$$

$$24 = 24$$

الحدود مع برنامج الجدول هو الحل هو الحل وطريقة الحل معلومة كثيراً ومعلمة

أكثر



(٤ ٧) أمثلة محلولة على التباينات والكثير من جهة الخطية

مثال (١):

أي من الجمل التالية صواب وأيها خطأ؟

(١) $1 \geq 7$ ← خطأ

(٢) $2 \geq 2$ ← - - صواب

(٣) $5 \geq \sqrt{7}$ ← صواب

(٤) $2 > \sqrt{7} > 1$ ← خطأ

(٥) $4 \geq |4|$ ← صواب

مثال (٢):

أوجد مجموعة الحل للمعادلة ومثلها على خط الأعداد

$$2 \text{ من } 2 \geq 2 \text{ من } 5$$

$$2 \text{ من } 2 \geq 2 \text{ من } 4$$

$$\frac{2 \text{ من } 2 - 2 \text{ من } 5}{2 \text{ من } 2 - 2 \text{ من } 4}$$

$$5 \geq 2 \text{ من } 4$$

$$\frac{2 \text{ من } 2 \text{ من } 4}{2 \text{ من } 2 \text{ من } 4}$$

$$5 \geq 2$$

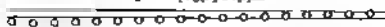
مجموعة الحل: $\{ \text{من } 2 \text{ من } 5 \}$

وعلى خط الأعداد



وسكفرة من $(-\infty, 2]$





مثال (٣)،

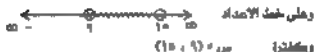
أوجد مجموعة الحل المتباينة المركبة:

$$(٥) \quad \begin{cases} ٢(١٢ - ٣) > ٣ \\ ٣(٢ - ١) > ٢١ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ٢٤ - ٦ > ٣ \\ ٦ - ٣ > ٢١ \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} ٢٤ - ٦ > ٣ \\ \hline ١٨ > ٣ \end{array} \quad \begin{array}{r} ٦ - ٣ > ٢١ \\ \hline ٣ > ٢١ \end{array}$$

مجموعة الحل: $\{٣ > ١\}$



مثال (١)،

أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

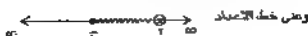
$$٢ \geq ٢ + ٣$$

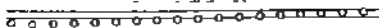
$$\begin{array}{r} ٢ - ٢ \geq ٢ - ٢ \\ \hline ٠ \geq ٠ \end{array}$$

بذلك نصل رموز التباين $٢ \geq ٢$

مجموعة الحل: $\{٢ \geq ٢\}$

كثيره $(٢, ٢]$





مثال (٥).

أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$(من + ٢) (من - ١) (من - ٤) > صفر$$

نبدأ بضرب المتباينات واحداً:

$$\text{إشارة من} + ٢$$

$$\text{من} + ٢ = \text{صفر}$$

$$٥ = ٣ = \text{منصر الاقتران}$$

$$\text{إشارة من} - ١$$

$$\text{من} - ١ = \text{صفر}$$

$$\text{من} = ١ = \text{منصر الاقتران}$$

$$\text{إشارة من} - ٤$$

$$\text{من} - ٤ = \text{صفر}$$

$$\text{من} = ٤ = \text{منصر الاقتران}$$

إشارة الطرف الأيمن من المتباينة

$$\text{مجموعة الحق: } (من > ٤ \vee ١ < من < ٢)$$

$$\text{بمفترقات: } (٤, ١) \cup (٢, \infty)$$



مثال (٦).

أوجد مجموعة الحل للمتباينة $\frac{1}{x} > ٣$

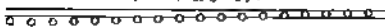
نحول الطرف الأيسر صفر

$$\frac{1}{من} - \frac{٣}{١} > \text{صفر}$$

ونجعل الطرف الأيمن اقتراناً مساوياً واحداً

$$\frac{١ - ٣من}{من} > \text{صفر}$$



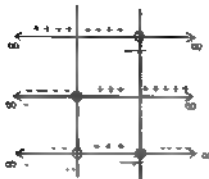


والحل مباشرة بقسمة الاشارات دون تحويلها الى شذو:

اشارة ٣ - ٢

١ - ٢ = صفر

صفر الاشارة ١/٣



اشارة من

صفر صفر الاشارة

مجموعة الحل: $\{ \text{من صفر صفر} , \text{من} < \frac{1}{3} \}$

كثافات: $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$

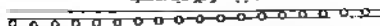
وعلى خط الاعداد

مثال (٧):

يملك مهندس ١٠٠٠ فداناً من الأراضي لزراعة الفواكه والخضار، يرى فيه دولاً الفواكه ٤٠٠ دينار في الموسم، ويؤتم الخضار ٥٠٠ دينار، ولكن وزارة الزراعة لا تسمح بزراعة أكثر من ٤٠٠ فداناً خضار، وإن الطلقة الانتهية المشاهدة في الموسم لا تزيد عن ٤٠٠ ساعة عمل، فليكن علمنا أن اليوم المزروع فواكه يحتاج لـ ٤ ساعات عمل في الموسم، وإن اليوم المزروع خضار يحتاج إلى ٥ ساعات عمل في الموسم، تكتم دوساً يوزع سمون فواكه وكم دوم يورعها خضار؟
 باستخدام الحل الهندسي

الحل:

نعرض أنه يزرع من دول فواكه، من دوم خضار



المبيعات فواكه (س) خضار (ص)

(١) $س + ص > ١٠٠٠$

(٢) $٤س + ٥ص \geq ٤٤٠٠$

(٣) $س \geq ٤٠٠$

لاقتصر الهدف $س = ٤٠٠ + ٥٠٠ ص$

عدد المبيعات: $س \geq ص$ مضر
 {
 مضر $س \geq ص$

الحل الهندسي:

نبدأ برسم القيود هكذا

(١) $س + ص \geq ١٠٠٠$ ← المعادلة المرافقة $س + ص = ١٠٠٠$

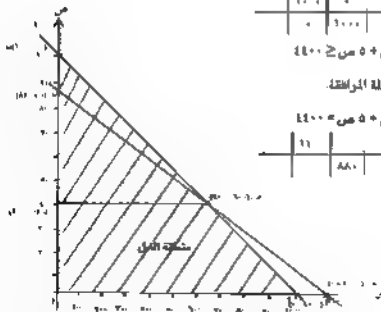
س	+	ص	=	١٠٠٠
١٠٠٠	٠	١٠٠٠		

$٤س + ٥ص \geq ٤٤٠٠$

المعادلة المرافقة:

$٤س + ٥ص = ٤٤٠٠$

س		ص	=	٤٤٠٠
١١		٨٨٠		



بعد أحداثنا، التقاطت النقطة هـ لحذف من

$$(١) \quad ٥ \text{ من} + ٥ \text{ من} = ١٠٠٠$$

$$(٢) \quad ٤٤٠٠ = ٥ \text{ من} + ٥ \text{ من}$$

$$(٣) \quad ٤٤٠٠ = ٥ \text{ من} + ٥ \text{ من}$$

$$(١) \quad ٥٠٠٠ - ٥ \text{ من} - ٥ \text{ من} = ٥٠٠٠$$

$$٥٠٠ - ٥ \text{ من} = ٤٥٠$$

$$٤٥٠ = ٥ \text{ من}$$

$$٤٥٠ = ٥ \text{ من} + ٥ \text{ من}$$

$$٤٥٠ = ٥ \text{ من} + ٤٠٠$$

$$٤٥٠ = ٤٠٠ + ٥٠ = ٤٠٠ + ٥٠$$

$$٤٥٠ = ٤٠٠ + ٥٠$$

$$٤٥٠ = ٤٠٠ + ٥٠$$

ومطابقة الحل بالفي نقطة الأمل

وهو الخفض أ هـ ل و: كتب في الشكل

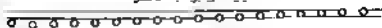
والآن نطعم الرمح كتب في الجدول

	ل	هـ	أ	من
	٤٥٠	٤٠٠	٤٠٠	٤٠٠
نلاحظ أن الأمل كان ٤٤٠٠	٤٥٠	٤٠٠	٤٠٠	٤٠٠
٤٤٠٠ = ٤٥٠ + ٤٠٠	٤٥٠	٤٠٠	٤٠٠	٤٠٠

$$٤٤٠٠ = ٤٥٠ + ٤٠٠$$

$$٤٤٠٠ = ٤٥٠ + ٤٠٠$$

القياسات والبرمجيات المستخدمة



$$y_{t+1} = y_t + \Delta y_t = (1 + \alpha) y_t + (1 - \alpha) \bar{y} = \frac{1}{2} y_t + \frac{1}{2} \bar{y}$$

重点难点

Yukawa (1935) $\phi \rightarrow \pi + \pi$ + (meson) $\pi \rightarrow \pi + \pi$

۱. س = ۶۰۰ تویم ییچمه لن ییزجه (تولکجه)

من " " : موم پرمب ان پڑو عها خضمار

لنحصل على ارباح قيمتها ٤٤٠٠٠٠ دينار وهي القسوى

3

مشارف (۱۹۸۷)

من الخطأ الخطية ٢ من ٤، عن يميناً

أولاً: نجد المتعاقلة التوافقية وهي 2^n من 1 من

والله اعلم المستقيم **مستعمل**

وبعد ذلك نقوم ببناء الجدول التالي:



$$17 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \right)$$

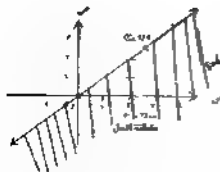
٢٥٠

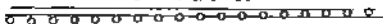
وهذا ان العمل المستقيم يصير بتقديرة الاعلى

عندئذ، يحقّون نقطة أخرى

بمعرفة بعض المستوي الذي

معامل منطقة الحل





هكذا نستقر بـ $(2, -1)$

$$(2, -1) < (3, -2)$$

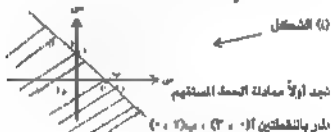
$$6 < \text{صفر نعم}$$

منصف المستوى الذي يحتوي بـ $(2, -1)$ هو منطقة الحل

والمنطقه ينتمي الى منطقة الحل أيضاً.

مثال (٩):

اكتب المتباينة التي تمثل منطقة الحل المتطابقة في شكل من الأشكال التالية:



نجد أولاً معادلة المستقيم

المر بالنقطتين $(0, 2)$ و $(2, 0)$

$$y - 2 = \frac{0 - 2}{2 - 0} (x - 0) \Rightarrow y - 2 = -x \Rightarrow y = -x + 2$$

$$y - 1 = -x \Rightarrow y = -x + 1$$

ونأخذ النقطه بـ $(2, -1)$ تكون معادلة المستقيم

$$y - (-1) = \frac{2 - (-1)}{2 - 0} (x - 0) \Rightarrow y + 1 = 3x \Rightarrow y = 3x - 1$$

$$y - 2 = 3x - 1 \Rightarrow y = 3x + 1$$

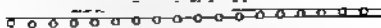
$$y - 2 = 3x + 1 \Rightarrow y = 3x + 3$$

أو $y = 3x + 3$ مع $y = -x + 2$ المعادلة المرادفة.

وبما أن النقطه للمستقيم متصل فإنه يدخل بالحل والمتباينة تشمل المساو : أيضاً



المثابينة وطور موجة الخطية



هذه الماحتمولين إما أن تكون المثابينة

$$3 \leq 2 + 3 \text{ (أو)} 3 \leq 2 + 3$$

نحقق نقطة الأصل في كل متاهة.

$$3 > (0) 2 + (0) 3$$

$$3 < (0) 2 + (0) 3$$

$$3 > 0$$

$$3 < 0$$

الجواب نعم

الجواب لا

$$3 \leq 2 + 3$$

المثابينة:



(أ) الخط المائل

نجد أولاً معادلة الخط المستقيم

المتقطع والذي لا يدخل بمنطقة

الحل والمثابينة لا تشمل المساواة

أطلاقاً

والحل مباشرة،

$$3 \leq 2 + 3$$

وبما أن نقطة ضمن منطقة الحل فإن $3 > 2 + 3$ هي المثابينة المنشودة.

نحقق من نقطة الأصل.

$$3 > 0$$

الجواب: نعم

$$3 > 2 + 3$$





مثال (١٠):

ممكن منطقة الحل لنظام للتباينات التالية:

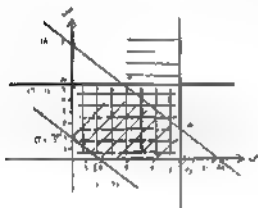
$$\text{من ك صفر ، من ك صفر ، من + من < ٢ ، من + من > ٨ ، من > ٥ ،}$$

$$\text{من > ٦}$$

بما أن من ك صفر ، من ك صفر فإن منطقة الحل متكونة من المربع الأول فقط.

والآن نبدأ بتمثيل التباينات على سطح بياني واحد يمكننا

$$\text{من > ٥}$$



$$\text{من = ٥ معادلة موازية}$$

والخط متصل

وبالنسبة نقطة الأصل

$$\text{من > ٦}$$

$$\text{من = ٦ معادلة موازية}$$

والخط متصل

وبالنسبة نقطة الأصل

$$\text{من + من < ٢}$$

$$\text{من + من = ٢ معادلة موازية}$$

والخط متصل

من	٠	٢
من	٢	٠

تحقق نقطة الأصل

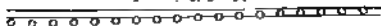
$$٢ < ٠ + ٠$$

الحواب لا

منطقة الحل لا يمر نقطة الأصل



التباينات والبرمجة الخطية



من $A >$

من $A \sim$ للمقارنة المباشرة

والنمط المتصل



تحقق نقطة الأصل

$$A \geq 0$$

الجواب نعم

فمنطقة المح ب اتجاه نقطة الأصل، ومنطقة المح للخطام بلا رؤوس كما في الشكل اعلاه

مثال (١١)

يبيع تاجر نوعين من المواد النسيجية هما: المسكرو والأرز، ويكلفه الطن الواحد من المسكر ٣٠٠٠ دينار، والطن من الأرز ٧٠٠٠ دينار، ويربح في طن المسكر عند بيعه ٥٠٠ دينار، كما يربح في طن الأرز ببيعه ١٥٠ دينار، فإذا كان الطلب المتوقع على المنتجين معاً لا يزيد عن ٢٥٠٠ طناً في الشهر، ولا يريد هذا التاجر أن يستثمر أكثر من ٧٥٠٠ دينار في توفير هذين المنتجين في مثاليته، فكم طناً يجب أن يوفر من كل مادة شهرياً.

نكتب برنامجاً خطياً لهذه المسألة:

الأرز (س طن)

المسكر

مردب المعلومات للمقالة

(١)

$$7500 \geq x + y$$

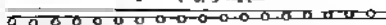
الطلب المتوقع

(٢)

$$750000 \geq 3000x + 7000y$$



المتباينات والبرصبة الطقبة



الانترن اللفق = 0١٠ من + ٤٥ من

عم السالفة: من < صفر + من < صفر

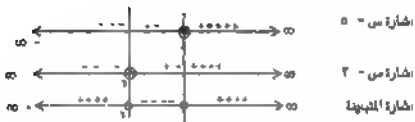
مثال (١٢)

أوجد مجموعة الحل للمتباينة

$$٧ - ٢ من + ١٠ < صفر$$

بالخط

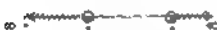
$$(من - ٥) (من - ٢٢) < صفر$$



مجموعة الحل: {من > ٢ , من < ٥}

مكافئات: (-, ٢) و (٥, ٥) و (-, ٥) و (٢, ٥)

وعلى خط الاعداد



مثال (١٣)

أوجد مجموعة حل للمتباينة

١ من - ٩ من + ١٠ > صفر

فرق الطرف الأيمن حسب فوس من الفارلة

١) ١ من - ١٠ من + ١٠ > صفر

لجعل من موجب الاشارة

٢ من - ٦ من + ١٠ < صفر

معكس لشارة التباين > الى <

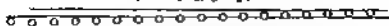
مميز الطرف الأيمن ب ٢

$$١٠ - ١ = ٩ - ٢ (١ -) = ٩ - ٢ = ٧$$

$$٩ - ٣ = ٦$$



التبليغات والبرسجة الخطية



$$9 \text{ من } 7 - 6 \text{ من } 1 < 12 \text{ من } 9 \text{ من } 7$$

$$\frac{12 \text{ من}}{12 \text{ من}} < 1 + 6$$

$$\frac{1}{7} < \frac{1}{9} \text{ من}$$

$$\left\{ \frac{1}{7} < \frac{1}{9} \right\} \text{ مجموعة الحل -}$$

$$\left(\frac{1}{7} = \frac{1}{9} \right) \text{ بكثرة من}$$

على خط الأعداد

مثال (١٦)

لنأخذ طالب مجهول تقدير ممتاز في مبحث الرياضيات، عليه أن يحصل من ٢٧٠ علامة في ثلاثة امتحانات تمتد لثلاثة أشهر. فإذا حصل الطالب على العلامتين ٩٩، ٨٤ في الامتحان الأول والثاني، ما هي العلامات التي يمكن أن يحصل عليها هذا الطالب في الامتحان الثالث؟

علامة الامتحان الأول ٩٩

علامة الامتحان الثاني ٨٤

علام الامتحان الثالث من

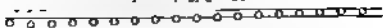
$$270 - 99 - 84 = 87$$

وبما أن العلامة الكاملة لكل امتحان هي ١٠٠

$$87 \leq 100$$



القياسات والتوزيعات الخطية



$$270 < 11 + 21 + 11$$

$$270 < 170$$

$$170 - 170 =$$

$$(1) \quad 10 \leq$$

من (1) ، (2) تكون

$$10 \geq 10 \geq 10$$

وهذا ما كانت المعلومات أعداد صحيحة نظرية

من 3 [95 ، 96 ، 97 ، 98 ، 99 ، 100]

مثال (17)

اكتب القياسات الى مجموعة حلها معطاة بالمتحدة الخطية:

الملاحظ بالمشكل ان المتادلات الثلاثة هي:

$$(1) \quad x - y = 1 \quad \text{والخط متصل}$$

بذلك مساواة

يحقق نقطة الأصل

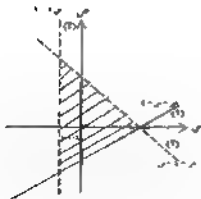
$$\text{الاختيار الأول} \quad x \leq 1 - y$$

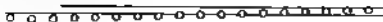
$$x \leq 1 - y$$

جواب نعم

$$\text{من } x - y = 1 \quad \text{للتباينة الأولى}$$

$$(2) \quad x = 1 \quad \text{من والخط متصل فلا مساواة يلتقيان}$$





دعنا نعطى الأصل \leq :

الاختيار الأول: $s \leq 4 - s$

$$0 \leq 4 - s$$

الجواب لا

الاختيار الثاني: $s \geq 4 - s$ من اللامتناهية الثانية

(3) $s = 1$ والنصف منقطع فلا مساواة في اللامتناهية

وهذا أن منطقة الحل على يمين النقط المتقطع فهو أكبر من 1

أي أن $s \leq 1$

نظام المتباينات هو: $s \leq 4 - s$

$$s \geq 1 - s$$

$$s \leq 1$$

مثال (١٨):

يتم مصنع للأدوات الكهربائية ٩٩ طنناً أسبوعياً كحد أقصى، ومن نوعين هما ملون وغير ملون، ويحقق ربحاً مقداره ٢٥ دينار لكل ثلث من النوع الملون و ١٢ دينار من النوع غير الملون، فإذا كان طلب المستهلك من طائرات النوع الأول لا يقل عن ضعف الطلب من نوعه الثاني.

استخدم الطريقة الجبرية (مصفوفات النصف البسيطة) لتحديد ما يجب التوجه من كل نوع لتحقيق أكبر ربح ممكن. علماً بأن جميع ما ينتج من التفازات يباع مباشرة.

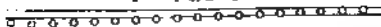
المنتج أو الطلب	ملون	غير ملون
	(س)	(س)

ترتيب لمعلومات المسألة $s \geq 99$ (١)

(٢) $s \leq 2s$



القياسات والبرمجة الخطية



لافتراض الهدف $z = 25س + 12ك$ من

عدم السلبية

$$\begin{cases} س \leq 50 \\ ك \leq 50 \end{cases}$$

يبدأ

باستحداث متغيرات وهمية جديدة لتحويل القيود والافتراض الهدف إلى نظام من المعادلات الخطية باستثناء القيود المتعلقة بعدم السلبية (من $ك \leq 50$ ، من $س \leq 50$) وهكذا.

$$(1) \quad 1س + 1ك + ل + ك = 25$$

$$(2) \quad 1س - 2ك + ل + ك = 12$$

$$(3) \quad 25س - 12ك + ل + ك = 0$$

ثم نقوم بترتيب المعادلات والقيود كما هو مبين بالجدول.

القيود	س	ك	ل	ك	ج	الثوابت
(1)	1	1	1	0	0	25
(2)	1	-2	1	0	0	12
(3)	25	-12	1	0	0	0

الآن نبحث عن الزاوية الأولى وهي المعلوم من

$$100 = 1 + 1$$

$$صفر = 1 + صفر$$

في النصف الثاني

فالزاوية الأولى حولها دوائر صغيرة في الجدول



التعليقات والتبريرات المخططة

وبناءً على الدوران حول الركن الثاني فإن جدول قيمة لكل الدركيرة 1 ويلقى عناصر العمود
أصنافاً استمقتة بمداخل الصف البسيط كما يلي:

س	س	ل	ك	ج	الثوابت
	(2)	1	1	0	99
1	2	1	1	0	28
20	12	0	1	1	0

س	س	ل	ك	ج	الثوابت
	(2)	1	1	0	99
1	2	1	1	0	28
22	12	0	1	1	0

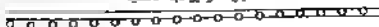
س	س	ل	ك	ج	الثوابت
	(2)	1	1	0	99
1	2	1	1	0	28
0	12	21	2	1	20-99

س	س	ل	ك	ج	الثوابت
	(1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	22
1	2	1	1	0	28
0	12	21	2	1	20-99

س	س	ل	ك	ج	الثوابت
	(2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	22
1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	26
		26	2	1	20-99

س - 26 تقديراً مائياً

س - 22 تقديراً غير مائياً



بحقن بهذا

$$r = 25 \text{ من } 12 \text{ من}$$

$$25 = (12) + (13)$$

$$2 - 29 = 29 + 160 =$$

$$29 = 2 \text{ دينار}$$

مثال (١٩)

(١) أوجد مجموعة الحل للمعادلة

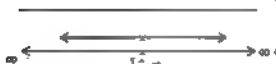
$$x \leq 2$$

نحلل المعادلة كما يلي:

$$(x < 2) \text{ أو } (x = 2) \text{ أو } (x > 2)$$

$$\text{أي أن } (x < 2) \cup (x = 2) \cup (x > 2)$$

ولتوضح هكذا



مجموعة الحل = ح

$$(-\infty, \infty)$$

وعلى خط الأعداد

(٢) أي الأزواج المرتبة الآتية يحقق للمعادلة

$$x - 2 \geq 12$$

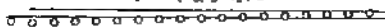
$$\text{أولاً: } (1, 2) \leftarrow (1) - 2 \geq 12$$

$$\text{الجواب لا } 12 \geq 18$$

$$(1, 2) \text{ لا يحقق للمعادلة.}$$



التبعية والبرمجة الخطية



ثالثاً (1، 2) $\leftarrow 12 - (1)2 - (2)2$

$12 \geq 2 - 12 \leftarrow$

الجواب نعم $12 \geq 10 \leftarrow$

(1، 2) يحقق المتباينة

رابعاً (2، 4) $\leftarrow 12 - (2)2 - (4)2$

$12 \geq 4 + 6 \leftarrow$

الجواب لا $12 \geq 10 \leftarrow$

(2، 4) لا يحقق المتباينة

خامساً (0، 0) $\leftarrow 12 - (0)2 - (0)2$

الجواب نعم $12 \geq 0 \leftarrow$

(0، 0) يحقق المتباينة

مثال (٢٠)،

أوجد مجموعة الحلول للمتباينة $\sqrt{x-3} \geq 1$

بما أن مجال الاقنوان $x-3 \geq 0$ \leftarrow (1)

وكذلك $\sqrt{x-3} \geq 1$

من $x-3 \geq 1 \leftarrow$ (2)

ومن (1)، (2) $x-3 \geq 1$

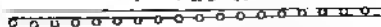
$$\begin{array}{r} x-3 \geq 1 \\ \hline x \geq 4 \end{array}$$

أي $x \geq 4$

مجموعة $\{x: x \geq 4\}$

وعلى خط الأعداد





٤. ٨ أسئلة وتعميمات وتمارين تقطال حلاً من الفهمين والدراسات

$$(1) \text{ حل المتباينة } x < \frac{1}{x+10}$$

$$\left\{ \frac{1}{x} - 10 > x \right\}$$

(٢) حل نظام المتباينات التالي نهائياً على المستوى الديكارتي

$$x + 1 \leq x - 1$$

$$(3) \text{ حل المتباينة } \frac{1-x}{1+x} \geq 1$$

$$(4) \text{ حل المتباينة } \frac{x}{x+1} < \frac{1}{x+1} \quad \left\{ \frac{1}{x} - 1 > 1 \right\}$$

$$(5) \text{ حل المتباينة صفر } \geq (x - 1) \text{ من } \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$$

$$\left\{ (-\infty, 1], \left[\frac{1}{x} - 1, \infty \right) \right\}$$

(٦) أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات:

$$(1) |x - 1| > 1 \quad \{x > 1\}$$

$$(2) |x - 1| < \frac{1}{x} \quad \left\{ \left(-\frac{1}{x}, \infty \right), \left(\frac{1}{x}, \infty \right) \right\}$$

$$(3) \text{ حل المتباينة } x \geq 1 \text{ من } \frac{1}{x} \geq \text{صفر}$$

$$\left\{ \left[\frac{1}{x}, \infty \right) \right\}$$

$$(4) \text{ حل المتباينة } x \geq 1 \text{ من } x > 1$$

$$\left\{ \left[\frac{1}{x}, 1 \right] \right\}$$





$$(٩) \text{ إذا علمت أن } \sqrt{2} = 1.41$$

فأي من الجمل التالية هي للصواب؟

$$(١) \sqrt{2} = 1.41$$

$$(٢) \sqrt{2} > 1.41$$

$$(٣) \sqrt{2} < 1.41$$

{ إرشاد: أوجد (١.٤١) أولاً ثم... }

(١٠) أوجد مجموعة الحل للمعادلات كلاً على انفراد:

$$(١) \frac{1}{x-2} \leq 4 \quad \{ (٢, \frac{5}{4}) \}$$

$$(٢) |x-6| > \frac{1}{4} \quad \{ (\frac{25}{4}, \frac{25}{4}) \} \text{ كثره}$$

$$(٣) \text{ صفر} > |x-2| \quad \{ (٣, ٥) \cup (١, ٢) \}$$

$$\{ (١, ٢) \cup (٣, ٥) \} \text{ إرشاد: صفر } > x-2 \quad \text{أو} \quad x-2 > 4$$

$$(٤) x-1 > \text{صفر} \quad \{ (١, ٢) \} \text{ كثره}$$

(١١) حل القياسات التالية:

$$(١) x-1 > \frac{1}{x-2} < \text{صفر} \quad \text{أو} \quad x-1 > \frac{1}{x-2}$$

{ إرشاد: اجعل الطرفين الأيمن اقتران نفسي واحد }

$$(٢) \frac{(x-1)(x-2)}{x} < \text{صفر} \quad \text{أو} \quad \frac{(x-1)(x-2)}{x} > \text{صفر}$$

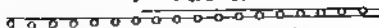
$$\{ (٢, \infty) \}$$

$$(٣) \frac{x}{x-2} < \text{صفر}$$

$$\{ (2, \infty) \} \text{ إرشاد: أوجد المجال أولاً }$$



التباينات والبرمجة الخطية





(١٦) اكتب البرنامج الخطي للمسألة التالية:

يسج مصنع معين من السلع أ ، ب ويحتاج لإنتاج الوحدة الواحدة من أ الى ساعتين عمل في القسم الأول، و ٤ ساعات عمل في القسم الثاني، ويحتاج لإنتاج الوحدة الواحدة من النوع ب الى ٤ ساعات عمل في القسم الأول و ساعة عمل في القسم الثاني، والحد الأقصى لعمل حقل من القمحين هو ١٢ ساعة، إذا علمت أن ربح الوحدة الواحدة من النوع أ ثلاثة دنانير، ومن النوع ب دينارين، كم وحدة يجب أن ينتج من حقل سبعة من أ ، ب لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

(١٧) أي من المتباينات التالية هي الصواب؟

$$(١) \quad ٧ - ٥ = ٢ \quad (٢) \quad ٢ \geq ٤ > ٥$$

$$(٣) \quad \frac{١}{٥} > ٢ > ٤ > ٢ \text{ حيث } ٢ > ٣ \text{ ح } (٤) \quad ٢ > ٣ > ٤ \text{ حيث } ٢ > ٣ \text{ ح}$$

(النهاية الرابعة)

(١٨) حل المتباينة

$$٢ - ١٨ > ٢ > ١٨ - ٢$$

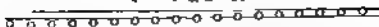
{ ارشاد انقسمها الى مركبتها ولترمطقتان بالأداء (و) }

$$\left\{ \left(\frac{٢٤}{٥} , ٥ \right) \cup (١٤ , ٥٥) \right\}$$

(١٩) مثل النظام التالي من المتباينات على المستوى الديكارتي.

$$٤ \geq ٢ \geq ٥$$

(٢٠) صاحب معرض للسيارات سافر الى ألمانيا ويحوزته ٢٢٠ ألف دينار شراء سيارات صغيرة وحفلات ركاب كبيرة لمرضه، إذا كان من السيارات الصغيرة ٥ آلاف دينار، ومن الحفلات الكبيرة ٨ آلاف دينار.



ما هو أصغر عدد من المسبارات الصغيرة والحلقات الكبيرة يمكن شراؤها بهذا المبلغ أو جزء منه؟ علماً بأنه يمكن شراء 6 مسبارات صغيرة على الأقل و 7 حلقات كبيرة على الأقل.

(٢١) أوجد مجموعة الحلول للمتباينات التالية:

$$\{ \emptyset \} \quad \frac{8}{y} + x - \frac{1}{y} \geq 3 + x - \frac{2}{y} > 2 + x - \frac{1}{y} \quad (1)$$

$$\{ x \} \quad 6 - x^2 > 10 \quad \text{منفرد}$$

(٢٢) أي من هذه العبارات صواب؟ وضع بالأسفل فقط:

(١) إذا كان $x > y$ فإن $1/x > 1/y$ ، $a > b$

(٢) إذا كان $x > y$ فإن $1/x > 1/y$ ، $a > b$

(٣) إذا كان $x > y$ فإن $1/x > 1/y$ ، x من 1 من 0 منفرد

(٢٣) حل المتباينة $\frac{1}{x} < 1$ ، x من 1 من 0 منفرد

$$\{ (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \}$$

(إرشاد: اجعل المتباينة في صورة واحد)

(٢٤) أي من الأزواج المرتبة الآتية يمثل حلاً للمعادلة $x^2 + 2x + 2 = 0$ من 1 من 0 منفرد

$$(2, 2), (2, -2), (-2, -2)$$



(٢٥) اكتب المتباينة التي حلها الهندسي يمثل بالشكل

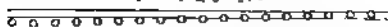
المطل الثاني

(إرشاد: أوجد معادلة الخط المستقيم، x من 2 من 1 من 0 منفرد)

(٢٦) مثل بيانياً نظام المتباينات التالي:

$$x + y > 6, \quad x - y > 10, \quad x + y > 16, \quad x > 8$$

من 0 من 1 من 0 منفرد ومنطقة الحل



(٢٧) أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات:

(١) $x + 5 < 0$ من صفر

(٢) $(x - 1) (x^2 - 6x + 9) \geq 0$ من صفر

(٣) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ من ٢

{ (١٠ - ٥٥) ، (١١ - ١٤) }

(٢٨) تقدم شركة صهبات أجهزة طبية عرضين للأجور لتقريبها، هكذا:

ويظهر عدد القطع التي يصنعها المطلوب شهرياً من قطعة

الأول، مثلاً بالاقتران x (س) = $x^2 - 30x + 160$ دينار شهرياً

الثاني، x (س) = $7x + 10$ دينار شهرياً.

متى يكون المرض الأول أفضل من المرض الثاني؟

{ أرفض: عندما يكون x (س) $< x$ (س) }

(٢٩) أوجد مجموعة الحل للمتباينة $(x - 2) (x - 3) \geq 0$ من صفر

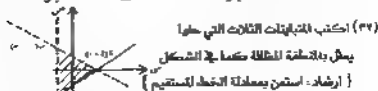
(٣٠) حل المتباينة $\frac{1}{x} < \frac{1}{5}$ { كفترة (٥ ، ٠) }

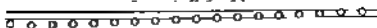
(٣١) اكتب بعبارة واحدة من العكسيتين، خاطئة

(١) $2 > 4$ العبارة (٤) $2 \geq 4$ العبارة

(٢) $2 < 4$ العبارة (٥) $2 \leq 4$ العبارة

(٣) $2 \neq 4$ العبارة (٦) $2 \leq 4$ العبارة





(٣٣) حل للمتباينة

$$\{ (-\infty, -1) \cup (0, \infty) \} \quad \text{من } 25 < 2$$

(٣٤) مثل بيانياً نظام المتباينات التالي:

$$\text{من } 2 + \text{من } 1 \geq 4, \text{ من } 0 \leq \text{من } 2 \text{ وظال منطقة الحل}$$

$$\{ \text{ارشد: من } 1 + \text{من } 2 \geq 4 \text{ تمثل بيانياً سطح دائرة} \}$$

(٣٥) مثل نظام المتباينات بيانياً وظال منطقة الحل.

$$\text{من } |2| \geq 1, \text{ من } |2| \geq 1$$

$$\{ \text{ارشد: أحد تعريف المتباينات: } 2 \geq 2 - 1, 2 > 1 - 1 \}$$

(٣٦) ما العدد الحقيقي الذي يوجد في مجموعة حل كل من المتباينات:

$$\{ 2 > 1 - 2, 2 > 2, 2 > 19, 2 > 2 \}$$

(٣٧) اكتمل المبراهات أدناه:

(أ) هلست أن:

$$\frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} \quad \text{فإن} \quad 2 > 2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} \quad \text{فإن} \quad \frac{2}{2} \geq \frac{2}{2} \quad (2)$$

$$(2) \quad (2 - 1) > (2 - 1) \quad \text{فإن} \quad (2 - 1) > (2 - 1) \quad (3)$$

علماً بأن $2 \approx 2$ تقريباً

$$(1) \quad 2 > 1 \quad \text{فإن} \quad (2 - 1) > (2 - 1) \quad (4)$$

$$\frac{2}{2} \dots \frac{1}{2} \quad \text{فإن} \quad \frac{2}{2} < \frac{1}{2} \quad (5)$$



(٣٨) عثر على المجموعات التالية على شكل ضربات، وسجلها على خط الاعداد

$$\{0 \leq m \leq t-1, \exists m \in \mathbb{N}\} = \{1\}$$

$$\{m \geq 0 : \exists n, m \in \mathcal{M}_n\} = \mathcal{M} \quad (2)$$

$$\{a \in \mathbb{R}^n : \|a\|_2 = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}$$

$$\{t \geq |s| \geq t - 1, \pi(s, s)\} = \pi(t, t)$$

(أ) ان تيسر المجموعة هي : $\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \}$ أو $\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6} \}$

والجواب: {19, 11} و {2 - 19 -}

(٣٩) حل المتباينات التالية وعلّل منطقة حل كل شكل منها على خط الأعداد:

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{1} = y = (2) \quad , \quad 0 < y = \text{عدد (1)}$$

[illegible]

$$11,1 \geq 4,2 + 6,9 (0)$$

(١٠) اشترى تاجر صعداً من طيب الطوى (من طيبة) بمبلغ ٢١٢ ديناراً، وبيع العبد الواحدة منها بمبلغ ٥ دنانير، ما أقل عدد من الطيب يخبه أن يربحها حتى يكسب؟

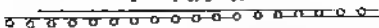
(أرطيد، الكعيب = من اللحم - مشكلة الشراء = ٥ - ٧٦٢ < سمر)

(٤١) اشر الى المتغيرات الخطية فيما يلي.

$$T = \{v \in V : v \text{ is a vertex of } G \text{ and } v \text{ is not a leaf}\}$$

$$0 \leq x_1 - x_2 \leq 1 + \sqrt{2}, \quad 0 \leq x_1 + x_2 \leq 1 + \sqrt{2}, \quad 1 \leq x_1 - x_2 \leq 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$



(٤٢) مثل بيانياً منطقة الحل للمعادلة $2x + 3y \leq 4$ من

أرشاد: استعن بالمعادلة المرافقة $x = 4$ من



(٤٣) خلال منطقتي حل للمعادلة

من $2x + 3y \leq 4$ من على الشكل المجاور



(٤٤) بحيث المتباينة التي تمثل المنطقة لمنطقة

أرشاد: أوجد معادلة الخط المستقيم

الواصل بين النقطتين



(٤٥) أوجد القيمة العظمى للمعظمى $2x + 3y$ من

في ظل القيود المرونة والمعلقة بالمضلع الظل في

أرشاد: نعرض نكمل الأضلاع في الافتراض مباشرة

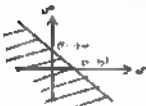
(٤٦) المنطقة المظلمة تمثل حل المتباينة

$$2x + 3y \leq 4$$

$$\text{أو (ب) } 2x + 3y \geq 4$$

$$\text{أو (ج) } 2x + 3y \geq 4$$

$$\text{أو (د) } 2x + 3y \geq 4$$



(٤٧) ارسم منطقة حل نظام المتباينات وظلها:

$$2x + 3y \leq 4, \quad 2x + 3y \geq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

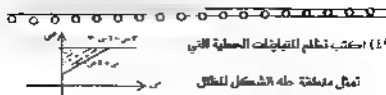
(٤٨) أي من النقط التالية $(1, 2), (2, 1), (0, 0)$

$$(2, -1), (1, 2), (1, -2)$$

يحقق النظام $2x + 3y \geq 4$ من

$$2x + 3y \geq 4$$

النتائج والبرمجة الخطية



(٤٩) اكتب نظم للنتائج الخطية التي

تمثل منطقة حله الشكل لتلك

(٥٠) يحتوي السبائك التقنية وجبات خاصة مستخدماً نوعين من الأطعمة،

يحتوي السبائك غرام من الأول: ٧٠٠ وحدة كالسيوم و ٥٠٠ وحدة حديد و ٢٥٠

وحدة فيتامين ب

يحتوي السبائك غرام من الثاني: ٢٥٠ وحدة كالسيوم و ٢٥٠ وحدة حديد و

٧٠٠ وحدة فيتامين ب

لذا مكافئ الحدود الدنيا لاحتياجات هذه الوجبة

٢٨٠ وحدة كالسيوم ١١٠ وحدة حديد ١٨٠ وحدة فيتامين ب

اكتب نظام المتباينات الخطية الذي يبين وزن كل من نوعي الأطعمة التي

يمكن استخدامها لا تستلزم الوجبة المتكافئة

(٥١) يُريد رجل أن يستثمر من أمواله ما لا يزيد عن ٢٠٠٠٠ دينار في مشاريع ذات

داخل مضمون وثلاث، فتتمتعه خبير لقمصاني بشراء سندات لتمية حكومية

بمائدة ٢٩ مئوية وسندات لقرانز لأحدى الشركات الصناعية بمائدة ١١٪

مئوية. فقرر الرجل أن يستثمر ما لا يقل عن ٦٠٠ دينار في السندات

الحكومية وأن لا يزيد للبالغ المستثمر في الشركات الصناعية من مثلي

المستثمر في السندات الحكومية ما للبالغ الذي يُستثمر في كل من النوعين

من السندات ويسأل القائد المستوي أكبر ما يمكن؟ اكتب البرمجة الخطية

تتطلب.

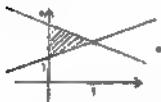
$$\{x = 9, y = 11 \text{ من}\}$$

(٥٢) تُسجِ مطعنة نوعين من اللحيق، ذريح بالطن الواحد من النوع الأول ٢ دينار وذريح بالطن الواحد من النوع الثاني ٢٠ دينار، ويجب إنتاج ما لا يقل عن ٦ طن من النوع الأول وما لا يزيد عن ١٠ طناً من الثاني اسبوعياً فهذا كحد الحد الأدنى للإنتاج الأسبوعي ١٠٠ طن، حدد كمية اللحيق من كل من النوعين الواجب إنتاجه اسبوعياً لتحقيق أكبر ربح ممكن بالطريقة الهندسية والجدولية

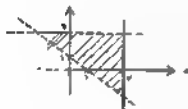
(٥٣) حدد بحدك بين نظام المتباينات، والتمثيل البياني الذي يمثل الشكل المظلل

بالقائمة ب

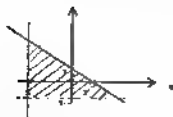
بالقائمة أ



$$\begin{aligned} & x \geq 2 \\ & x > 2 \\ & x < 1 - x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & x < 1 \\ & x \leq 2 \\ & x \geq 1 - x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & 2 \leq x \leq 4 \\ & x \leq 1 + x \\ & x \leq 0 \end{aligned}$$



(٥٤) حدد مجموعة الحل للنظام

$$x + y > 13$$

$$x \leq 0, y \leq 0$$

(٥٥) ترغب إحدى المجموعات الخيرية توزيع نوعين من الملابس للشمس من ذات الحجمين الكبير والصغير على المئات المتبقية، فإذا كان سعر المعطف الكبير ٨ دينار وسعر المعطف الصغير ٤ دينار، وحجمت الجمعية المذكورة ٨٨ ديناراً لشراء المعاطف. اكتب المتباينة التي تبين عدد المعاطف الممكن شراؤها من كلا الحجمين، ثم عطاها بياناً

{ ارشاد: ليس من الضروري الشراء بالكامل مع أنه هو الأفضل }

(٥٦) تفتح إحدى الفول المصرية ٦٠٠٠ طن من البطيخ يومياً، وتستخدم لتصدير نوعين من الفواكه، الأول يحمل ٢٠ طن في الرحلة الواحدة، والثاني يحمل ١٥٠٠ طن في الرحلة الواحدة. إذا استخدمت الفول ٢ فواكه من النوع الأول، ٤ فواكه من النوع الثاني طمأ بأن هناك التصدير لا يمكنه أن يشتمل يومياً أكثر من ٥ فواكه. حدد الفواكه من كل نوع الذي يمكن الفول من تصدير بطولها بثلث عدد ممكن من الفواكه

(٥٧) أوجد مجموعة الحل للنظام من $x \geq 6, y \geq 5, x + y \leq 12, x \leq 0$

، $x \leq 0$ هندسياً وأوجد أكبر قيمة للاقتراض في $x + y = 12$ من

(٥٨) أوجد مجموعة الحل للمتباينة $x + y > 10$

(٥٩) ما قيمة أكبر عدد صحيح للتمثيل بحيث أن $x > 1, y > 0$ { ٥ }



(٦٠) اكتب نظام المتباينات الخطية والذي

مجموعة حله متساوية للمنطقة المظلمة

كما في الشكل





١) ١) التساويات القياسية Geometrics

هندسة التحويلات خرج من فروع الهندسة، وهذا الفرع يبحث في دراسة الأشكال الهندسية بالمتوازيات، يسمى المتوازيات القياسية، والتحويل الهندسي بالعلم الإقترانات هو اقتران تناظر من المستوى إلى نفسه يرسم كل نقطة من نقطة المستوى فوق نقطة أخرى من نفس المستوى.

إذا كانت في مجموعة جميع النقاط في المستوى من فإن التحويل الهندسي هو الاقتران لتناظر من ي إلى ي

بمعنى أن لكل نقطة P في Y نرسم فوق نقطة واحدة

P' في Y أيضاً:

أي أن $P' = f(P)$



حيث f هي صورة P بواسطة الاقتران التناظري f

ومن المعلوم أن الصورة يجب أن تكون وحيدة

والاقتران التناظري f يحمل الشكلين الهندسيين متطابقين، إذا وجد تساوي قياسي يرسم أحدهما فوق الآخر

وبهذا الفصل سنناقش المتوازيات القياسية المستوية التالية

١) ٢) الانعكاس Reflection:

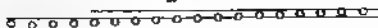
الانعكاس تحويل هندسي لتبثت فكرته من ملاحظتنا لما نشاهده من صور لأجسامنا عندما تنف أمام المرآة، أو أي سطح لامع تصبح منهامنا.

سمي الانعكاس باسمه هذا لأنه تحويل هندسي يكون سموراً لأشكال معكوسة جانبياً كما في الشكل.

هذا "مجموع من دوائر" لمرآة عمودية يمر بـ O نقطة مركزها O



هندسة الانعكاسات



وأما، مرآة، أو ما يحل محلها كخط.

مستقيم ل تسمى محور الانعكاس

Axis of Reflection

والانعكاس يحفظ الأطوال ولا زوايا

ولا نقصان لا بالشكل ولا بالأحجام



عدد ايجاد صور لها، ولكنه يقلبها جانباً كما في الشكلين أعلاه.

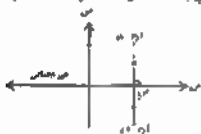
ويكون بعد الصورة عن محور الانعكاس يساوي بعد الشكل عن المحور

نفسه.

ويمكن استخدام المحورين الإحداثيين كمحاور للانعكاس طبقاً إلى

الانعكاس في محور السينات:

بما أن بعد الصورة عن المحور تساوي بعد الشكل (نقطة أو قطعة مستقيمة



أو شكل هندسي) عن المحور، فإن:

الإيجاد صورة أ بالانعكاس في محور

السينات، فنزل العمود أ من على

محور السينات ونجد على امتداده

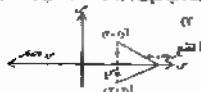
بقدر نفسه لمصبح أ من أ ولتصبح

أ (٣، ٢) صورة أ (٣، ٢)

أي أب صورة أ (مر، مر) بالانعكاس في محور السينات هي أ (مر، مر)

أي بتغيير إشارة المقياس الثاني (العمودي) فقط.

وبما أنه فإن صورة القطعة المستقيمة أ ب حيث أ (٢، -٣) ، ب (٥، -١)



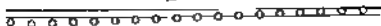
هي أ ب حيث أ (٢، ٣) هي صورة أ (٢، -٣)

والنقطة ب (٥، ١) فهي صورة ب (٥، -١) لأنها تقع

على محور الانعكاس



مجموعة التحويلات



- مثل أن صورة $A(2, 5)$ بالانعكاس في محور السينات هي $A'(2, -5)$ كما في الشكل



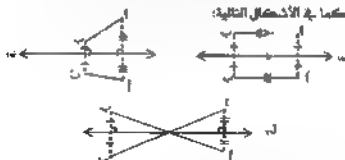
ثانياً: أن صورة $A(2, 5)$ بالانعكاس في محور الصادات هي $A'(-2, 5)$ كما في الشكل

- مثل أن صورة $A(2, 5)$ بالانعكاس في محور الصادات هي $A'(-2, 5)$ كما في الشكل

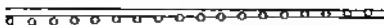


وبكذلك فإن الانعكاس متجهول هندسي واحد من التحويلات القياسية يحقق العديد من الخواص والصفات تبرزها كما يلي:

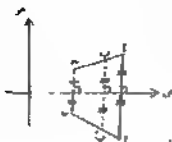
(1) الانعكاس يحافظ أطوال القطع المستقيمة أي أن الانعكاس يرسم أي قطعة مستقيمة (كمجموعة من النقط) هي قطعة مستقيمة أخرى تطابقها



فإذا كانت القطعة المستقيمة AB // KL ← فإن $A'B' // K'L'$ وصفاً $AB // A'B'$



(ii) الانعكاس وحفظ البينية Betweenness.



والتمثيل إذا كانت النقطة ب

تتم بين النقطتين أ ، ج. فإن

صورتهما ب' تقع بين صورتين

النقطتين أ' ، ج' (صورتي أ ، ج)

بالانعكاس على نفس محور الأشكال

وليس محور السينات، كما في الشكل

ويُعتبر من ذلك رياضياً.

إذا كانت ن (أ ، ب ، ج) فإن \leftarrow ن (ب' ، ج' ، أ')

لأننا كانت النقطة أ ، ب ، ج على استقامة واحدة، فإن الصور أ' ، ب' ، ج' تقع

على استقامة واحدة أيضاً، كما في الشكل أعلاه.

(i) الانعكاس وحفظ مقياس الزوايا Angle Measure.

في الشكلين أ ب ج ، أ ب' ج' لتطابقين حيث أ محور أ ، ب' محور ب ، ج'

صور ج فإن الانعكاس عمود الانعكاس (ل) يوشي قياسات الزوايا كما يلي

$$\angle أ ب ج = \angle أ ب' ج'$$

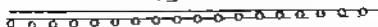
$$\text{وهكذا} \angle ب ج أ = \angle ب' ج' أ$$

$$\text{وكذلك} \angle ج أ ب = \angle ج' أ ب'$$

كما في الشكل.



خدمة التحويلات



(١٧) الانعكاس يعكس الاتجاه الدوراني (Reverse Orientation)

إن الشكل الجانور يوضح انعكاس المثلث A بـ B بالانعكاس على المحور L



من الملاحظ أن الاتجاه الدوراني

حول رؤوس المثلث A بـ B هو

اتجاه مع عقارب الساعة

وأما الاتجاه الدوراني حول

صورته بالانعكاس على المحور L

A بـ B فهو ضد عقارب الساعة

لذلك يسمى الانعكاس عكسي

فإنه عكسي (Reverse Isometric) وهذا ما يسمى بشكل عام بالانقلاب الجانوي.

(١٨) الانعكاس يحفظ التوازي (Parallelism)

إذا كانت القطعة المستقيمة AB محور الانعكاس L فإن صورته $A'B'$ على المحور



ل كما في الشكل.

وبالتالي فإن $AB \parallel A'B'$

مثال:

أوجد إحداثيات صورة كل نقطة من النقاط الآتية بالانعكاس:

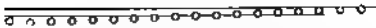
(١) بالنسبة لمحور الصيحات

(٢) بالنسبة لمحور الصافات

(٣) بالنسبة للمستقيم mn

١ (٣ ، ٢) بـ (٢ ، ٣) عكس ، جـ (٢ ، ٣) د (١ ، ١)





١٠ - ٣) الدوران Rotation:

تحويل L هندسي وتساوي فيلس ناتج عن دوران شعاع. فو شكل هندسي في مستوى حول نقطة ثابتة في المستوى نفسه يسمى مركز الدوران ويزاوية معلومة تسمى زاوية الدوران. كما في الشكل.



يتمكن أن α شعاع في المستوى من فإذا دار هذه الشعاع باتجاه معاكس لدوران عقارب الساعة حول النقطة و فإنه يأخذ الموضع α وهذا دوران موجب مركزه النقطة ويزاوية مقدارها α (مقياس الزاوية موجب).

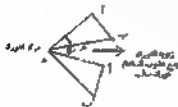
وأما الدوران السالب فهو الحاصل من دوران α حول النقطة و باتجاه دوران عقارب الساعة.



ومركزه النقطة ويزاوية α (مقياس الزاوية سالب)

ومن الملاحظ أن النقطة الوحيدة التي ترمس فوق نفسها هي مركز الدوران O

والمثلث يمكن أن يدور حول أحد رؤوسه كمركز للدوران كما في



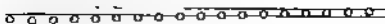
والدوران يمكن أن يكون باتجاه دوران عقارب الساعة أي دوران سالب أو سمر دوران عقارب الساعة أي دوران موجب

وهذا الدوران المحايد Identity Rotation

عندما يدور الشكل 360° حثف أو دورة كاملة ليعود ويتطابق على نفسه

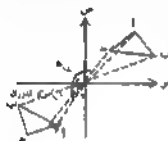
وكأنه ما دبر إطلاقاً





والنوران يمكن أن يوضح باستخدام الاحتمالات التحويلات في مستوى
تحويلات كسرية كما يلي:

في شكل هنسي كالقائمتين مثلاً يمكن أن يدور دورة كاملة أو جزءاً منها
حول نقطة الأصل كما في الشكل.



إذا دار مثلث أ ب ج نصف دورة حول
النقطة (0,0) فالدوران في صورته
يصبح أ ب ج

$$\text{حيث } \frac{\text{دوران}}{360} \leftarrow \text{أ}$$

$$\text{ب } \frac{\text{دوران}}{360} \leftarrow \text{ب}$$

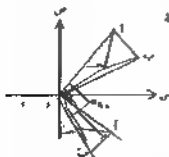
$$\text{ج } \frac{\text{دوران}}{360} \leftarrow \text{ج}$$

وبهذا أ ب ج $\frac{\text{دوران}}{360} \leftarrow \text{أ ب ج}$ مع عقارب الساعة أو عكسها معاً

فمركز الدوران نقطة الأصل (0,0)

وزاوية 90° والدوران موجب أو سالب كوضع نفسه

ويمكن أن يدور المثلث أ ب ج ربع دورة (90°) حول نقطة الأصل كما في
الشكل



الدوران سالب حيث أنه مع عقارب الساعة

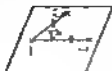
مركزه نقطة الأصل (0,0)

وزاويته 90° ربع دورة



و لكي سنناقش خصائص الدوران كتحويل هندسي قياسي:

(أ) الدوران يحفظ الأطوال:



فإذا دارت النقطة المستقيمة A, B

حول النقطة A كما في الشكل

برأوية مقياسها d فإن صورتها

تصبح A, B'

ومن البديهية بمسكان أي نلاحظ أن $AB = A'B'$

النقطتين المستقيمتان A, B متساويتان في الطول

أو A, B'

(ب) الدوران يحفظ مقياس واتجاه الزوايا (مسألة أو مبرهن)



إذا دارت برأوية 'كما في الشكل'

حول الرأس B فإن مقياس الزاوية

$A, B, C =$ مقياس الزاوية A', B', C' $= d$

سواء أكان الدوران مع أو ضد عقارب

الساعة.

(ج) الدوران يحفظ الاستقامة المستقيمة، فإنا نلاحظ النقطة B محصورة بين

النقطتين A, C كما في الشكل، ولذا النقطة المستقيمة A, B, C

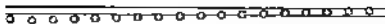
في مستوى من حول النقطة B برأوية d عند عقارب الساعة تصبح صورتها بالدوران

A', B', C' (B' تبقى مقسما لأنها مركز الدوران)

والنقطة B صورة B' تبقى بين A صورة A'

والنقطة C صورة C' نفسها.





(iv) الدوران يحفظ التوازي،

(ذ) كانت القطعة المستقيمة AB

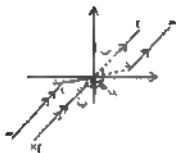
نوازي لقطعة المستقيمة CD

ودارت شكل منها نصف دورة حول

نقطة الأصل و $(0, 0)$ كما في

الشكل فإن AB كج CD كما في

الشكل أي أن.



إذا كان AB كج CD $\frac{180^\circ}{360^\circ}$ دورتي AB كج CD

الدوران سالب حيث أنه مع عقارب الساعة

وزاوية 180° (نصف دورة)

وكتعميق على الانعكاس والدوران ستناقش التماثل Symmetry

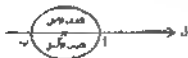
مبدئياً يقال للشكل أنه تماثل إذا أمكن طيه حول مستقيم بحيث يتطابق

نصف الشكل حول هذا المستقيم، حينها يسمى بالمتكافئ.

محور التماثل Axes of Symmetry

كالدائرة المتساوية حول أي خط مماس يطبق على أي قطر منها كما في

الشكل،



حيث L محور التماثل

لأنه يطبق على التطار A ب

مع يجعل نصف الدائرة الأعلى يطابق نصف الدائرة الأسفل.

هالانعكاس الذي يجعل الشكل مطبقاً على نفسه يسمى تماثلاً لهذا الشكل.



فندتلك بالمساوي السابقين متماثل حول المستقيم اللار بالعمود للنصف النازل من رأسه على قاعدته، كما في الشكل.



كون المتماثل يتولد عن الانعكاس، ولأن

المثلث أ ب ج محور الانعكاس ← أ ب ج ب

أي، مثلث وصورة بالانعكاس مطابقة على بعضهما البعض.

فالمثلث أ ب ج متماثل حول المحور ل اللار بالعمود للنصف للضاعدة (أ ب د).

وعكسًا، يمكن التماثل حول مستقيم (محور تماثل) ولأن يكون التماثل

حول نقطة (مركز التماثل) يكون التماثل يتولد عن الدوران حول نقطة كما في الشكل.



عندما يدور المستطيل أ ب ج د 180° حول

النقطة م (مركز الدوران) يطابق على نفسه

لذا، تصبح النقطة م (مركز التماثل) أي أن

□ أ ب ج د 180° حول م □ ج د أ ب وهو نفسه للمستطيل.

أي يطابق للمستطيل على نفسه.

مع تدويره وتوسعه.

حيث أ ← أصبح بعد الدوران ج

ب ← أصبح بعد الدوران د

ج ← أصبح بعد الدوران أ

د ← أصبح بعد الدوران ب



هذا التمثال رياضياً مجموعة من النقاط هو أي تساوي قياسي يرسم هذه النقطة

هو نفس، (وليس بالضرورة، لكل نقطة فوق نفسها)، كما في الشكل.

حيث المستقيم $\langle \rangle$ المطبق على قطره



أ. هو محور تمثيل أي أن

أ. صورته ← 1

ب. ← د

د. ← ب

ج. ← ج

وممكن لهية النقطة.

وبالتالي أ. ب. ج. د. ← صورة


والتمثيل ظاهرة تكسب بالانتظام، ومنشدة بكثرة في نهاية اليومية
بشكل جعل الانتباه، إذ أنه من الممكن الحصول على هذا التمثال البسيط، إذ ما
نظراً إلى منصب فكرة التقدم قبل بداية المبراة بمشاهدة ترتيب اللاعبين على نصفي
لنصف بشكل تماثل كما في الشكل.



علماً بأن كل فريق

١١ لاعب موزعين

كما في الشكل.

وأما لاحظ أن هناك أشكالاً هندسية منتظمة غير متماثلة حول محور مثل متوازي
الأضلاع  الذي لا يمكن طيه حول مستقيم ليصبح نصفه الأول مطبقاً
على نصفه الثاني.

علمة التحويلات

وهكذا، الشكل الرباعي، شكل هندسي غير منتظم ونفس له محور تماثل.

وهكذا، لك، القفوح للزاوية وعبرها من الأشكال، مثال،

رسم محور التماثل (إن وجد) للشكل الخماسي المنتظم (الخمس) \rightarrow محور التماثل والذي يمر بأحد رؤوسه مثل أ.



وهامودي هي الضلع المقابل د. ج. كلمة في الشكل.

مثال،

حدد هندسياً تماثلات الدائرة.



لندائرة محاور تماثل لا نهائية حيث أن يمكن من تقسيمها إلى أي قسمين متطابقين.

هو محور تماثل لها.

وعلى سبيل المثال المحاور l_1, l_2, l_3, \dots

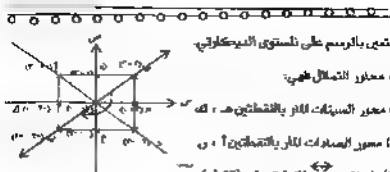
وعلى المستوى التحليلي يمكن بيان محور تماثل أو محاور تماثل الأشكال الهندسية المنتظمة المتناظرة كالترتيب والاعتكاف والاشارة والاشك المتساوي الساقين والثلث المتساوي الأضلاع - وهكذا:

أ) $(2, 2)$ مستطيل

ب) $(2, 2)$

ج) $(2, 2)$

د) $(2, 2)$ رؤوس مربع، جد أربعة تماثلات لهذا المربع



مستعين بالرمز على المستوى الديكارتي.

أب محور التمثال فهي:

(1) محور السينات المار بالنقطة α في

(2) محور الصادات المار بالنقطة α و

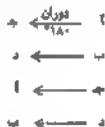
(3) المستقيم $\alpha\beta$ المنطبق على (القطر) $\alpha\beta$

(4) المستقيم $\alpha\beta$ المنطبق على القطر $\alpha\beta$

وجميع هذه المحاور تمر بنقطة الأصل.

مع ملاحظة أن المربع $\alpha\beta\gamma\delta$ يمكن أن يدور نصف دورة حول نقطة الأصل لتكون نقطة الأصل هي مركز الدوران التمثال مع أو ضد عقارب الساعة.

لنأخذ المربع على نفسه ونظهر رأسه فقط هكذا:

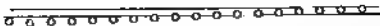


ليصبح المربع $\alpha\beta\gamma\delta$ $\xrightarrow{180^\circ \text{ دوران}}$ المربع نفسه ولكن باسم $\delta\gamma\alpha\beta$.

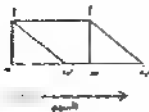
وهذا يؤكد أن التمثال ناتج عن انعكاسي بمحور التمثال وعند دوران بمركز دوران وزاوية دوران.

× الانسحاب Translation:

تحويل هندسي وتساوي قياسي ناتج عن حركة الشكل الهندسي بشروط معينة، تكون الشكل الهندسي $\alpha\beta\gamma\delta$ ما سيب ينتج عنه صورة $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ تبقى مطابق



توہماً لہ کما فی الشیخ

[illegible]

الهميم (أبناء ذكوه)

غير انك لا بد من طهارة القلب

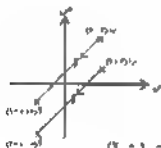
الافتتاحية

واعتقدوا أن القانون الاتباعي ينقل جميع نقاط (المشكل) للمصادقة نفسها أي أن المصادقات بين 1 و 4 وبين 5 و 6 و بين 7 و 8 متساوية تماماً وفي نفس الاتجاه (هذا الاتجاه السهم أو اليمين).

وأما الانسحاب على المستوى الديكتاتوري فتوضم بالذات:

ب) (1 - 1 - 1 - 1) و (1 - 1 - 1 - 1) بين تأثير الاتصاف بمقدار

وحدائق الأسفل:


$$(1 + 1 - 1 - 1) \uparrow \xleftarrow[\text{الأسفل}]{\text{وعندما}} (1 - 1 - 1 - 1) \uparrow$$
$$\sigma = 1.5 \times 10^{-11} \text{ cm}^2$$

ب (1، 2) ← وحدتی
الاعضاء

 $(Y, 1) \hat{=} \leftarrow$

وكما أن الاستغفار للأستغفار يؤخر على الإحاديث المبادئ فتعلم بالتقصيل

وأي الانسحاب للأعلى فيؤثر على الاحتمال للصلابة فقط بالزيادة.



والانتمحاب اليمين يؤثر على الاحداثي السيني فقط بالزيادة

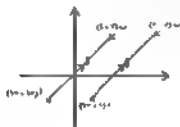
والانتمحاب اليسار يؤثر على الاحداثي السيني فقط بالنقصان

لذا كانت $(-1, 1)$ و $(1, 2)$ بين تأثير الانتمحاب اليمين بمقدار وحدتين

$$\{(-1, 1) \rightarrow (1, 2)\} \xleftarrow[\text{اليمين}]{\text{وحدين}}$$

$$\text{وهكذا} \quad \text{ب} (1, 2) \xleftarrow[\text{اليمين}]{\text{وحدين}} \text{ب} (1, 2+2) \quad \text{ب} (1, 4) \leftarrow \text{ب} (1, 5)$$

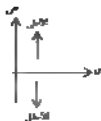
هكذا في الشكل.

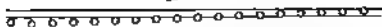


وبشكل عام الانتمحاب لليمين واليسار هكذا



والانتمحاب للأعلى والأسفل هكذا:





ويشكر عام:

الانضمام له ليسان يتم بالنقصان ، وباليمن يتم بالزيادة

والأفضل يتم بالتقصص، والأعلى يتم بالزيادة

أي ليسار وللأسفل - - - - - متجهان، لليمين والأعلى - - - - - زيادة

مثال

(۱) بکانت صورت آ (س، م) ← آ (س، م) + ۲، م - (۱) فجد صورت ز (س، م)

المثلث ذو الزاوية حادة

$$(1 - \lambda) = 2$$

0.0000

$$(1, t) = 1$$

تحت تاليف الأخصائيين النفسيين

اولاً، نفصّل المبدأ (ب) من (ع) ← أ (ب) ٢، ج = (١)

الإعداد: (س) بصبح (س + ٢) أي التمتع باليومين ٢ وحدات أي أن جميع

النشاط : هـ ، و تتمتع كل هيأة و وحدات

والاحداثى التماسي من يصبح من \sim في انساب الأكل ١ وحدة. وجميع

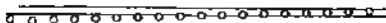
التمتع بتسعين الأمتل يومه واحد وحده

٢ (من، هي) — أ (من، هي، من، هي)

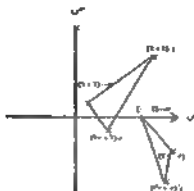
$$(\gamma - \delta)\tilde{z} \leftarrow (1 - \gamma - \delta + \gamma)\tilde{z} \leftarrow (1 - \delta)\tilde{z}$$

$$(1 - 1, 1 + 1) \triangleleft - (1, 1) \triangleleft$$

$$(\Gamma \rightarrow 0)_g \leftarrow (\xi \rightarrow 1(1+\xi))_g \leftarrow (\xi \rightarrow 2)_g$$



والشكل التالي يوضح الانسحاب



ومن خصائص الانسحاب

(1) الانسحاب يحفظ القيمة:

ويمبر من ذلك باختصار شديد

ن $a + b = c$ ، $b = c - a$ ، $a = c - b$

اي ان النقطة b تقع بين a ، c

وبكذلك سورها b تقع بين a ، c

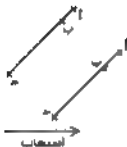
(2) الانسحاب يحفظ الأطوال والاستقامة.

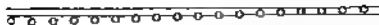
ويمبر من ذلك باختصار شديد:

بما ان $a + b = c$ قطعة مستقيمة فإن a ، b ، c قطعة مستقيمة أيضاً.

ون طول $a + b = c$ طول $a + b$

وبكذلك طول $b = c - a$ طول $b = c - a$





(١٦) الانسحاب يحفظ التوازن:

إن انسحاب شبه المنحرف

باتجاه السهم يعني أ ب كذ جـ

مكون أ ب كجـ و

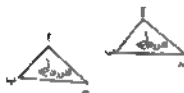


(١٧) الانسحاب يحفظ الاتجاه الدوراني:

الانسحاب للمثلث أ ب جـ

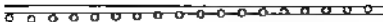
باتجاه السهم

يعني المثلث أ ب جـ



بمعنى الاتجاه الدوراني، إذ يسمى أ ب جـ باتجاه دوران عقارب الساعة

وكذلك أ ب جـ يسمى باتجاه دوران عقارب الساعة كما هو واضح في الشكلين "



وأخيراً متوجز مفاهيم مجموعات التماثل الهندسية Group of symmetries
كما يلي:

التماثلات الهندسية كتحويلات هندسية مستوية تحفظ

الأطوال والمساحات والمجموع للأشكال الهندسية.

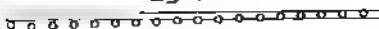
ونقسم الانعكاس والدوران والانسحاب وهي نوعان هما:

الأول: تماثلات هندسية مباشرة Direct Isometries:

وهي التي تحفظ الاتجاه الدوراني مثل الدوران والانسحاب

الثاني: تماثلات هندسية عكسية Opposite Isometries:

وهي التي تعكس الاتجاه الدوراني أي قلب الشكل جانبياً مثل
الانعكاس.



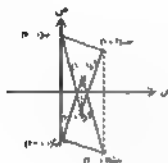
(١٠) أمثلة محاولة على التباينات والتبرسجة الخطية

مثال (١)

جد، صورة المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ (١ - ٢) ، ب (٥ - ٥) ، ج (٢ - ٢)

بالانعكاس في محور السينات.

الحل



نجد صورة مثلث أ ب ج الذي رؤوسه وهي:

صورة أ
ع محور السينات ← ١

صورة ب
ع محور السينات ← ٥

صورة ج
ع محور السينات ← ٢

∴ أ ب ج هي صورة المثلث أ ب ج بالانعكاس في محور السينات.

مثال (٢)

حدد محورين قمتك تتماثل كل من الأشكال التالية (إن وجدت).

(١) المستطيل.



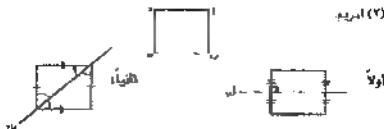
تقريباً
للمحور ل



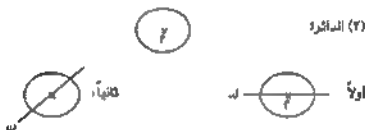
أولاً
للمحور ل



(۲) امریہ۔



(٢) التأثير



ملحق ١

للدائرة محاور تماثل غير نهائية، حيث شكل قطري هيماء هو محور تماثل لها

مذیل (۴)۔

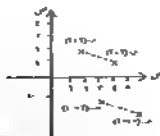
إذا كانت صورة النقطة A (م، م) هي النقطة A' (م، م) فإن A هي النقطة A' (م، م) - (1) جد

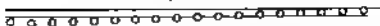
صورت النقطة ب (2، 2)، ج (3، 1) تحت تأثير الانعكاس تقسيم.

$$(1, 2)_{\mathbb{C}} = (1 - \tau, \tau \circ \tau)_{\mathbb{C}} \xleftarrow{\text{مساوي}} (\tau, \tau)_{\mathbb{C}}$$

والنقطة جـ (١ - ٣) $\xrightarrow{\text{مباشرة}} (١ - ١ - ١ - ٣) \xrightarrow{\text{جـ}} (٢ - ١ - ٥)$

يمكن في الشكل التالي:





مثال (۱۰):

(۱) $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)}$ — (۲) $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

فجدد صور رؤوس التتبع h و h' حيث $d = (1, 1)$ و $h = (1, 1)$ و $h' = (1, 1)$ تحت تأثير بعض التماثلات. h و h' أطوال أضلاع المثلثين h و h' المتطابقين.

$$(Y - 1, 0) \cdot \vec{d} = (1 - 1 - 1, Y + Y) \cdot \vec{d} \xrightarrow{\text{مساوية}} (1 - 1, Y) \cdot \vec{d}$$

$$(x, y) \xrightarrow{\psi} (x, y + \psi(x)) \xleftarrow{\text{مشتق}} (x, y)$$

$$(x, y)_2 = (x + t, y + t)_2 \xleftarrow{\text{Liquor}} (t, t)_2$$

$$y'(1-y) + (1-y)^2 \sqrt{-2z}$$

$$\sqrt{0} = 1 + i \sqrt{0} =$$

$$T(Y) = (Y - 1) \sqrt{Y} = \frac{1}{2} Y^{3/2} - \frac{1}{2} Y^{1/2}$$

WV999V.

$$\sqrt{(Y - \bar{Y})^2 + (Y - \bar{Y})^2} = 5.5$$

$$\sqrt{N} \sqrt{1 + \frac{1}{N}} =$$

$$\sqrt{(1-1-2) + (1-2)} = 2$$

$$\sqrt{1+i}\sqrt{1-i} =$$

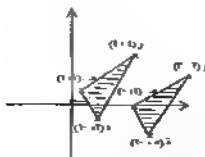
$$\sqrt{(1-1) + (1-1)} = 0$$

$$\overline{TD} = 4.4 \text{ V}$$

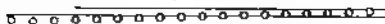
$$\sqrt{(1-1/2) + (1-1/4)} = 1.3$$

$$\sqrt{10} \approx 3.16227766$$

مفاهيم في الحساب التفاضلي:



خريطة التحويلات



ستعجب أن الطوال الثلاثة الثلاثة متساوية، وهذا يبين أن الانعكاس

تحويل عكسي يحفظ الأول، لذا فهو تحويل عكسي قياسي أو متساوي قياسي.

مثال (5):

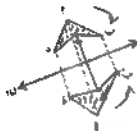
حدد صورة الشكل A ب ج د التالي بالانعكاس في محور الانعكاس l .

وبلاحظ أن A ب ج د مغلوب جانياً

بالنسبة للشكل A ب ج د حيث يقرأ

بالجاء عكس عقارب الساعة

A ب ج د يقرأ مع اتجاه عقارب الساعة



مثال (6):

حدد صورة النقطة $A(4, 5)$ على المستوى الديكارتي بدوران

(مقدار) 90° حول نقطة الأصل واتجاه عقارب الساعة

$A(4, 5)$ دوران 90° مع عقارب الساعة $A'(5, 4)$



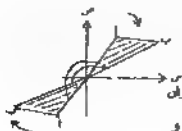
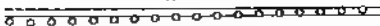
مثال (7):

إذا كان A ب ج مثلث فحدد صورته على المستوى الديكارتي بدوران

وهو 90° حول نقطة الأصل، ويعكس اتجاه عقارب الساعة



هتلانة التحويلات



١٨٠ عكس، عاكس السطح

٥١٨ عكس على السطح

(←) و جیٹ ہی مرکز البوریاں

صورہ ۱ ب و دوران ۶۸ ← آب و عکس ملانے کی قیادت

بكمال في العمل

عن الملاحظ أن الدعوى لا يقبل التكميل

فدلت ا ب و تكراً مع عقرب الساعة، وكذلك أ ب و تكراً مع عقرب
الساعة أيضاً

مضافی (۸)۔

حدد صورة المستهلك أ ب ج د بواسطة الانعكاس حول الخط l جـ



الحمد لله

١ - مبدأها : (لأنها قائمة على محور الانتماء)

←

جاء في: «لأنها واضحة على من يقرأها»

↑

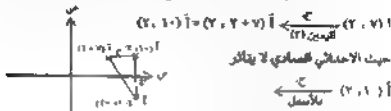
صورة أمجد - ^{الإنشكاس} ← أبجد ذ "كما في الشكل"





مثال (٩):

أوجد صورة النقطة $A(2, 7)$ تحت تأثير الانسحاب T باتجاه اليمين وبمقدار ٢ وحدات، ثم تحت تأثير الانسحاب T باتجاه الأسفل وبمقدار ٤ وحدات



$$A(2, 7) \xrightarrow{2} A'(4, 7) \xrightarrow{4} A''(4, 3)$$

حيث الاحداثي السيني لا يتأثر

وهكذا $A(2, 7) \xrightarrow{2} A'(4, 7) \xrightarrow{4} A''(4, 3)$ بانسحاب مقداره ٢ و ٤ والذي يمكن إيجاد مقداره من نظرية فيثاغورس هكذا يلي:

$$A''(4, 3) \xrightarrow{5} A'''(9, 3)$$

$$5 = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

وحدات

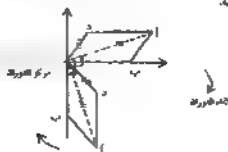
وباتجاه ٥ كما في الشكل

مثال (١٠):

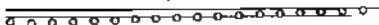
أوجد صورة متوازي الأضلاع $ABCD$ بعد دوران حول الرأس D وبزاوية ٩٠°

مع عقارب الساعة

الحل:



تمثيل التحويلات



أ دوران حول ج

ب دوران حول ج

ج أليها مركز الدوران

د دوران حول ج

∴ أ ب ج د دوران حول ج

ونقرأ باتجاه عقارب الساعة أي نكتبها أ ب ج د

عند الدوران لا يتغير الاتجاه

مثال (١١):

رسم محور التماثل الوحد لسكن من الأشكال التالية



مثال (١٢):

حدد مركز دوران التماثل للأشكال وزاوية الدوران ليصبح مركز

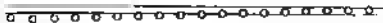
تماثل بسيط.

الحل:

مركز الدوران أو مركز تماثل التماثل للأشكال هو نقطة التقاء

مستقيماته المتوسطة أو منتصفات زواياها تكونها هي نفسها كما في الشكل.





وهو النقطة γ



والدوران γ يعني اتجاه (مع أو ضد عقارب

الساعة) ويعبراً عنها قيمتها

$$^{\circ}12 = \frac{^{\circ}36}{4} \quad (I)$$

$$^{\circ}24 = ^{\circ}12 + ^{\circ}12 \quad (II)$$

$$^{\circ}36 = ^{\circ}12 + ^{\circ}12 + ^{\circ}12 \quad (III)$$

نكتب في الأشكال التالية



دوران $^{\circ}12$
مع عقارب الساعة



دوران $^{\circ}24$
مع عقارب الساعة



دوران $^{\circ}36$
مع عقارب الساعة

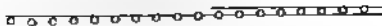
ويمكن ايجاد الدورانات هكذا يلي:

$$(1) \quad a \rightarrow b \leftarrow \frac{\text{دوران } ^{\circ}12}{\text{مع عقارب الساعة}} \leftarrow b \rightarrow a \quad (\text{تمثل})$$

$$(2) \quad a \rightarrow b \leftarrow \frac{\text{دوران } ^{\circ}24}{\text{مع عقارب الساعة}} \leftarrow b \rightarrow a \quad (\text{تمثل})$$

$$(3) \quad a \rightarrow b \leftarrow \frac{\text{دوران } ^{\circ}36}{\text{مع عقارب الساعة}} \leftarrow b \rightarrow a \quad (\text{تمثل})$$

أي للمثلث المتطابق الأشكال الثلاثة تماثلات بالدوران حول نقطة التقاء
المستقيمات المتوسطة فيه أو حول نقطة التقاء منصفات زواياه



مثال (١٣):

أ ب ج مكث متساوي السطوح، فيه أ ب = ١ ج وقياس الزاوية $\angle \text{ج} = ٧٠^\circ$
أوجد صورته بالانعكاس بمحور مار يقاً عنه أ ب ج



أ الانعكاس مأبوء ←
ب ج

ب الانعكاس مأبوء ← ب
ب ج

ج الانعكاس مأبوء ← ج
ب ج

∴ أ ب ج الانعكاس مأبوء ← أ ب ج
ب ج

من الملاحظ أن أ ب ج يُقرأ مع عقارب الساعة

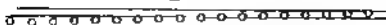
أما صورته أ ب ج فتقرأ ضد عقارب الساعة

من هنا نقول الانعكاس يقلب الشكل جلياً.

مثال (١٤):

أجب بـنعم أو لا فقط:

(١) الانعكاس يحفظ ترتيب النقاط (الليزية) ← الجواب نعم



(١٢) دحل تحويل هندسي يكون تساويًا قياسيًا ← الجواب لا

(١٣) المربع له محور تماثل واحد فقط ← الجواب لا

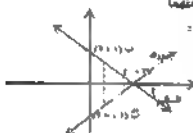
(١٤) الدوران يحفظ مقاييس الزوايا ← الجواب نعم

مثال (١٥):

أوجد معادلة صورة المستقيم $3x + 2y = 1$ بالانعكاس حول محور السينات

نجد نقطتين على المستقيم ومصورة كل منهما

بالانعكاس حول محور السينات هكذا:



أولاً أفضل نقطة هي:

أين يتقاطع المستقيم مع $3x + 2y = 1$ محور

الصادات.

نضع $x = 0$ فنجد

$$3(0) + 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

أي $(0, \frac{1}{2})$ تقع على المستقيم وعلى صورته بكونهما على محور الانعكاس.

نجد نقطة أخرى على المستقيم $x = 1$

$$3(1) + 2y = 1 \Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow y = -1$$

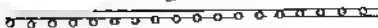
$$x = 1$$

أي $(1, -1)$ تقع على المستقيم

نجد صورة $(1, -1)$ بالانعكاس حول محور السينات: $(1, 1)$

ولإيجاد معادلة صورة المستقيم نأخذ بالنقطة $(1, 1)$ و $(0, \frac{1}{2})$

$$1 = \frac{y - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{y - \frac{1}{2}}{1} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$



$$\frac{y}{1} = \frac{1}{2} \sqrt{x} = \frac{\sqrt{1+16}}{16} \sqrt{x}$$

$$\frac{\sqrt{1+16}}{1+16} = \frac{\sqrt{1+16}}{\sqrt{(1-1-2)+\sqrt{(1-1)}}} = \frac{1}{1} \text{ وكذلك}$$

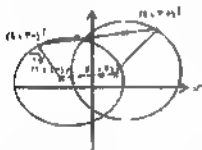
$$\frac{y}{1} = \frac{1}{2} \sqrt{x} = \frac{\sqrt{1+16}}{16} \sqrt{x}$$

بما أن اختيار A ب ج ، A ب ج الظاهرة متساوية

∴ A ب ج يشابه A ب ج

مثال (١٧)

رسم الدائرة التي مركزها $M(-2, 1)$ وتر بالنقطة $A(-2, 4)$ ثم حدد
مركزها بالانتماس بمحور المماسات، وتم أوجد معادلة محورها بمحور الانتماس.



$$\sqrt{(1-4)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

لإيجاد مركزها بالانتماس بمحور المماسات نجد صورة مركزها $M(-2, 1)$
والنقطة التي تمر بها $A(-2, 4)$ حول محور المماسات هكذا:

$M(-2, 1)$ انتماس حول محور المماسات $\rightarrow M'(1, 2)$ (حيث الاحداثي العكسي لا يتأثر)

$A(-2, 4)$ انتماس حول محور المماسات $\rightarrow A'(4, 2)$ (حيث الاحداثي العكسي لا يتأثر)

معادلة الصورة الناتجة:

$$\sqrt{(1-4)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \text{ لا يتأثر بالانتماس}$$



ا انعكاس
محور التماثلات ← الجواب (د)

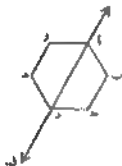
ب انعكاس
محور التماثلات ← الجواب (د)

و كذلك ج ← د

د ← ج ويمكننا -

مثال (٢٠)

حدد معاين التماثل للشكل المثلثي المنتظم (المضلع).



أولاً لـ

محور التماثل اثنان بقطره أ د

حيث الانعكاس حوله يكما يلي:

ا ← ب

ب ← ا

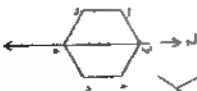
ج ← هـ

د ← ز

هـ ← ج

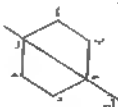
أي ا ب ج د هـ ز ← محور تماثل أ د ج د هـ ز = المنعكس نفسه

و كذلك لـ



اثنان بقطره ب هـ

و كذلك لـ



اثنان بقطره ج و





(١٠) استكملة وتعديلات وتكميلين تحتلج حاولاً من التمارين والندارسات

(٩) أحب عما يلي بشيء من الاختصار مع التوضيح بالرسم أو بالتعميل البياني

(١) ما عدد مساور تماثل الثالث المتساوي الساقين؟ {١}

(٢) ما عدد مساور تماثل الشكل السداسي المنتظم؟ {٦}

(٣) ما عدد مساور تماثل الثالث المتطابق الأضلاع؟ {٢}

(٤) ما صورة النقطة (٢ ، -٥) بالانعكاس في نقطة الأصل؟ {٥ ، ٢}

(٥) ما صورة النقطة (٢ ، -٥) بالانعكاس في محور السينات ثم في محور

المساكنات على التوالي؟ {٥ ، ٢}

(٦) ما صورة النقطة (٢ ، -٥) بالانعكاس في محور السينات؟ {٢ ، ٥}

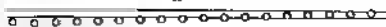
(٧) ما قياس زاوية الدوران المحقق؟ {٣٦٠°}

(٨) ما صورة النقطة (٢ ، -٥) بالانعكاس في المحاور؟

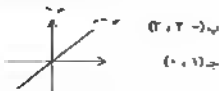
{٢ ، ٥} ← {٢ ، -٥} ← {٢ ، ٥}

(٩) ارسم صورة المثلث أ ب ج بالانعكاس في المحور ل كما في الشكل.





(٣) عرِّض صور شكل من النقط: $(٥, ٢)$



بالانعكاس في المستوى من $م$ في شكل في الشكل

(٤) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، أوجد صورته بدوران مقايسه - ٩٠° حول

نقطة حول نقطة الأصل وعلى المستوى الديكارتي، كما في الشكل.



(٥) ما إحداثيات صور شكل من النقط:

$$(٢, -٢), (٢, ٢), (٢, ٠), (٣, ٣)$$

بدوران مقايسه نصف دورة حول نقطة الأصل وعلى المستوى الديكارتي.

(٦) ما إحداثيات صور شكل من النقط: $(٢, ٣)$ ، $(٢, -٣)$ ، $(٢, ٠)$ ، $(٢, -٢)$

بالانعكاس الذي قاعدته $(٣, ٠)$ ← $(١, ٠)$ من $م$ على المستوى الديكارتي.

(٧) إذا كانت النقطه $م$ صورة النقطه $هـ$ $(٢, ١)$ وكانت $م$ صورة النقطه

$ج$ $(١, ٢)$ بالانعكاس في محور السينات، احسب طول القطعة المستقيمة $هـ م$

وكذلك $هـ ج$

$$\{ \sqrt{١٧}, \sqrt{١٧} \}$$



(٨) بين أن مُنصف الزاوية هو محور تماثل لها.

{ ارشاد استعمال تطابق المثلثات }

(٩) إذا كاننا لنكتب $(-٠, ٢)$ ، $(٢, ٠)$ ، $(٢, ٢)$ ، $(٢, -٢)$ هي

نقوس مستطيل، ما إحداثيات رؤوسه بالاعتماد بمقدار ٥ وحدات للأعلى،

وما مساحة المستطيل A بـ C والمستطيل A بـ D حيث A صورة A ، B بـ

صورة B ، C بـ صورة C ، D بـ صورة D .

{ ٦ ، ٦ }

(١٠) من الشكل المجاور عيّن:



(١) صورة المثلث A بـ D

(٢) صورة المثلث A بـ S

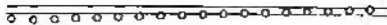
{ المثلث A من S المثلث A بـ D }

(١١) إذا كان (S) = $|S|$ ، استعمل بالرسم لكتابة القاعدة في (S) بالاعتماد

مقداره وحدتين للأعلى، واستكتب القاعدة أيضاً بالاعتماد بمقداره وحدتين

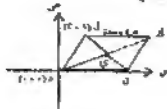
للأسفل.

{ في (S) = $|S| + ٢$ ، في (S) = $|S| - ٢$ }



(١٢) اعتمد على الشكل الذي يمثل متوازي الأضلاع م ن ك ل لإيجاد إحداثي

الرأس ك ونقطة تقاطع قطريه ي.

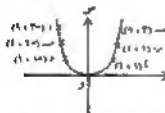


{ ارشاد: جد إحداثيات النقطة ن ، ك بالانعكاس }

(١٣) عيّن صورة المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ (٢ ، ٢) ، ب (١ ، ١) ، و (٠ ، ٠)

بالانعكاس في محور الصادات، وما فزع كل من المثلثين أ ب و ، أ ب' و من حيث الأضلاع.

(١٤) حدد محوراً واحداً فقط لتمثيل شكل من الأشكال الهندسية التالية:



(١٥) عيّن انعكاس الشكل المجاور

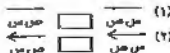
في محور الصادات، ثم انعكاسه

في محور السينات مكلّاً على انفراد.

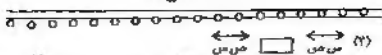
(١٦) ما إحداثيات محور التماثلين أ (٣ ، -) ، ب (٠ ، ٢) بالانعكاس في

المستقيم $y = x$.

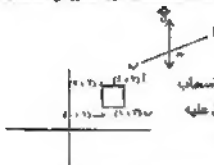
(١٧) ضبع في المستطيل أدناه أحد الزوايا $\neq 90^\circ$



خمس التحويلات



(١٨) ارسم صورة القطعة المستقيمة أ ب بالانعكاس حول المحور l كما في الشكل.



(١٩) ارسم صورة المربع أ ب ج د بعد الانعكاس للأعلى بمقدار ٣ وحدات، وعيّن عليه إحداثيات رؤوسه بعد ذلك.

(٢٠) ارسم صورة حرف Z (المكبر كما في الشكل) بعد دورانه بزاوية قياسها 90° حول النقطة أ ولتجاه عكس عقارب الساعة.



(٢١) إذا كانت النقط أ (٢١ ، ١٢) ، ب (١٢ ، ١٢) ، ج (١٢ ، ١٠) ، د (١٠ ، ١٠) ، ع (١٠ ، ١٦) ، فبين أن المثلثين أ ب ج ، ج د ع متشابهان، حيث ونقطة الأصل.

(٢٢) إذا كانت النقطتان أ (٢ ، ٦) ، ب (٤ ، ٥) وكانت أ ، ب هما صورتاهما بالانعكاس حول محور السينات، وكانت أ ، ب هما صورتاهما (أي أ ، ب) بالانعكاس حول محور الصادات.

أوجد معادلتي المستقيمين l_1 ، l_2 ثم بين أنهما متوازيتان.

(٢٣) ارسم محوراً تماثل كل من الأشكال التالية إن وجد:



مربع

مثلث

شجرة

قلعة

(٢٤) أوجد صورة النقطة (٢ ، -٣) بالانعكاس حول المحور $س = صفر$
 (٢٥) أوجد إحداثيات صورة النقطة أ (٣ ، ١) بالانعكاس حول المحور $س = ١$ ثم أوجد إحداثياتها بالانعكاس حول المحور $س = ١$ كذلك على افتراض.

- (١) ج. ماموكس "مبادئ التحليل الرياضي" ترجمة وليد ديب، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، ١٩٨٤ م.
- (٢) ايول و. موكووضسكي "حسب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية" جزءان، ترجمة أحمد سميدان ورفقة، ١٩٨١ م.
- (٣) سعد حسين محمد ورفقة، الدخول في الرياضيات الحديثة، جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧٦ م.
- (٤) ميمان أبو سبيح الرياضيات للعلوم الاقتصادية والإدارية مكتبة بندا سمعان، ١٩٩٥ م.
- (٥) طارل زسرايوسين، كرياضيات ترجمة علي بن الأشهر، معهد الاتحاد العربي، بيروت - ١٩٨١ م.
- (٦) عادل سودان ورفقة "رياضيات المعاصرة" جزءان، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٩٧١ م.
- (٧) عايش زقون كسفيات الاحصاء الوصفية، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان، ١٩٨٩ م.
- (٨) عبد الرحيم القواسمة وزميلة، فصول الاختبارات في الرياضيات المعاصرة، جزءان، دار الشرف للنشر والتوزيع - عمان، ١٩٨٢ م.
- (٩) عبد العزيز هسكل ورفقة "لأجسام"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.
- (١٠) عبد العزيز هسكل ورفقة "رياضيات"، دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.
- (١١) عبد العزيز هسكل "الرياضة المالية" دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٧٨ م.
- (١٢) علي عبدالله اندخاخ "تأليف علماء العرب في الرياضيات" دار الاعتصام.
- (١٣) فيودوسسكي، الرجوع في الرياضيات المالية ترجمة أنطون منصور، دار جبر للطباعة والنشر، روسيا - موسكو، ١٩٧٥ م.
- (١٤) مكسا يعقوب الرياضيات الحديثة جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧٣ م.
- (١٥) محمد عادل سودان، "رياضيات للغة"، ثلاثة أجزاء، دار العلوم للطباعة والنشر.
- (١٦) محمد عاطف خير الدين ورفقة، كالتالي في الرياضيات المعاصرة عدة أجزاء.
- (١٧) نيل ديفيدسون ورفقة "الجبر الجرد" ترجمة ديب حسين، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، ١٩٨٢ م.
- (١٨) نخبة من المؤلفين "الرياضيات للروسية وفق منهج التربية والتعليم الأردني"، ٢٠٠٧ م.
- (١٩) ولیم جروس ورفقة "مبادئ المثلثات المتناظرة"، ترجمة أحمد علاونة ورفقة، مركز المكتب الأردني، ١٩٩٠ م.

